

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

25. Band, Heft 4

16. Dezember 1941

S. 145—192

## Geschichte.

**Bortolotti, Ettore:** *Le progressioni nella matematica preistorica.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 395—401 (1941).

Aus dem Papyrus Rhind und babylonischen Funden werden Beispiele arithmetischer und geometrischer Reihen zusammengestellt und auf die verwendeten Lösungsmethoden untersucht, im ganzen mit dem negativen Ergebnis, daß man aus richtigen Lösungen im Einzelfall nicht auf Kenntnis allgemeiner Regeln zurückschließen könne.

*Thaer (Detmold).*

● **Reidemeister, Kurt:** *Die Arithmetik der Griechen.* (Hamburg. math. Einzelschriften H. 26.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1940. 32 S. RM. 2.50.

Die beiden ersten Paragraphen sind einer Kritik der späteren antiken Quellen über die frühe griechische Arithmetik gewidmet, und zwar enthält § 1 eine Stellungnahme zu den Quellen im allgemeinen, § 2 eine Auseinandersetzung mit den beiden „Pseudotheorien“ moderner Mathematikhistoriker, daß am Anfang der Arithmetik eine Lehre von den Mittelbildungen und eine Lehre von den figurierten Zahlen gestanden habe. Verf. verwirft grundsätzlich alle Zeugnisse neupythagoreischer und neuplatonischer Literatur (insbes. Nikomachos, Theon von Smyrna und sogar Proklos) und läßt eigentlich nur gelten, was sich aus Platon, Aristoteles und Euklid entnehmen läßt. Ref. bekennt, daß ihm dieses summarische Verfahren zu radikal erscheint. In § 3 behandelt Verf. die Lehre vom Geraden und Ungeraden in Buch IX von Euklids Elementen und ihre Vorgeschichte. Er sieht in ihr „das erste *μάθημα* oder Lehrstück, in welchem sich die logisch-arithmetische Wissenschaft der Pythagoräer niedergeschlagen hat“, sie sei „zugleich das Fundament der pythagoreischen Metaphysik“. Die Behandlung der auf das Gerade und Ungerade bezüglichen Sätze aus Euklid IX deckt sich in vielem mit der früher von Oskar Becker [Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 533—553 (1936); dies. Zbl. 15, 147] gegebenen, die Verf. entgangen zu sein scheint. § 4 beschäftigt sich mit der Arithmetik der geometrischen Reihe (einschl. Flächen- und Körperzahlen), wie sie uns vornehmlich in den Büchern VIII und IX und in einigen Sätzen aus Buch X der Elemente vorliegt. Auch in ihr sieht Verf. alte vorplatonische Lehre und stellt die Verbindung zur Musiktheorie, der Lehre von den harmonischen Intervallen, her. Anschließend legt er seine Auffassung von der wesentlich arithmetischen (Gegensatz: formal-algebraischen) Absicht des Buches X der Elemente dar.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Vacca, Giovanni:** *Sugli speechi ustori di Archimede.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 71—73 (1940).

Die Erzählung, daß Archimedes während der Belagerung von Syrakus Schiffe der Römer durch Brennspiegel in Brand gesteckt habe, gilt gemeinhin als erfunden, da sie nur bei späten Autoren überliefert ist. Verf. verteidigt die Möglichkeit (nicht mehr!), daß sie doch eine geschichtliche Tatsache wiedergibt; er will die Überlieferung auf den Archimedesbiographen Herakleides und den Historiker Coelius Antipater zurückführen.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Ludendorff, H.:** *Astronomische Inschriften in Piedras Negras und Naranjo.* (Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 13.) Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1940, 1—60 (Nr 6).

Von den Inschriften der Maya kann man die Daten lesen; was sie sagen sollen, muß durch Zusammenstellung von auf diese Tage fallenden Ereignissen erschlossen werden. Zu etwa 100 Daten der Jahre 254—539 n. Chr. werden Erklärungen gegeben;



es handelt sich um Konjunktionen von Gestirnen, besonders solche von Mars und Saturn in den Schnittpunkten der Ekliptik mit der Milchstraße. Die Inschriften zeigen, zumal ein Teil der Daten errechnet zu sein scheint, eine sehr genaue Kenntnis der synodischen Umläufe der Planeten; der längste auftretende Zyklus ist der der Venus von 243 Jahren. *Thaer (Detmold).*

**Müller, Conrad:** Volumen und Oberfläche der Kugel bei Âryabhata I. Deutsche Math. 5, 244—255 (1940).

Interpretation der bisher mißverstandenen Strophen 6 und 7 des Ganitapâda von Âryabhata I (499 n. Chr.), die von Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, Rauminhalt der Pyramide (regelm. Tetraeder), Flächeninhalt des Kreises, Oberfläche und Volumen der Halbkugel handeln. Durch die neue Interpretation werden die Unsinnigkeiten beseitigt, die nicht nur die Modernen bisher, sondern auch alte indische Kommentatoren in den Strophen gefunden haben. Zugleich zeigt sich, daß die Ausdrucksweise des Âryabhata so gewählt ist, daß sie Hinweise enthält, auf Grund deren die Beweise für jeden Einsichtigen sich sofort ergeben. *Bessel-Hagen (Bonn).*

● **Zinner, Ernst:** Geschichte und Bibliographie der astronomischen Literatur in Deutschland zur Zeit der Renaissance. Leipzig: Karl W. Hiersemann 1941. 452 S. geb. RM. 38.—.

Verf. behandelt die Zeitspanne von 1448 bis 1630. Er bezieht sich auf das Gebiet der Sternkunde und ihrer unmittelbaren Hilfswissenschaften, also auf Kalender, Kalenderreform, Vorhersagen von Himmelserscheinungen, Himmelsbeobachtungen, Beobachtungsinstrumente einschließlich Sonnenuhren, Himmelskugeln und Himmelskarten, Ausgaben und Übersetzungen der griechisch-römischen Klassiker und späterer bedeutender Schriftsteller, die eigentlichen astronomischen und astrologischen Fachwerke (ohne die Vorhersage und Deutung der Kometen und neuen Sterne) und auf größere Sammelwerke mit einzelnen astronomisch-astrologischen Kapiteln. Dabei beschränkt er sich auf die Druckorte in Deutschland und der deutschen Schweiz einschließlich Prag und (bis 1560) Krakau. Einige wenige Zweifelsfälle, in denen der Druck zwar dem deutschen gleicht und wohl von deutschen Druckern getätigt wurde, aber das Werk mit ziemlicher Sicherheit nicht in Deutschland erschien, sind weggelassen, ebenso die nicht in Deutschland erschienenen Werke deutscher Autoren. Unter Benutzung eines sehr reichhaltigen Schrifttums, worin der Gesamtkatalog der Preussischen Bibliotheken und der Gesamtkatalog der Wiegendrucke an der Spitze steht, werden 5608 Nummern aufgezählt. Das Nachsuchen wird durch ein Verzeichnis der wichtigsten und weitestverbreiteten Werke und durch ein sehr sorgfältig gearbeitetes Namenregister wesentlich erleichtert. In der 70 Seiten umfassenden Einleitung wird der großartige Aufschwung der Himmelskunde, der durch die drei großen Deutschen Regiomontan, Kopperrnick und Kepler herbeigeführt wurde, in knappen Worten umrissen, aber auch eine Fülle wissenswerten zeitgeschichtlichen Materials über die Art des damaligen wissenschaftlichen und volkstümlichen Schrifttums usw. beigebracht. Als Nachschlagewerk ist der vom Verlag hervorragend ausgestattete Band unentbehrlich; freilich ist er trotz der aufgewandten Sorgfalt nicht ganz fehlerfrei. So ist es dem Verf. entgangen, daß die Ausgabe der Opera omnia des Nicolaus von Cues (Hain 5893) nicht zu Nürnberg 1476, sondern zu Straßburg 1488 (ohne Ort und Jahresangabe) erschien und von Martin Flach gedruckt wurde. *Hofmann (Berlin).*

**Agostini, A.:** Le serie sommate da Pietro Mengoli. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 231—251 (1941).

Der Bologneser Mathematiker Pietro Mengoli (1625—1686) hat das Verdienst, als erster die Grundlagen der allgemeinen Reihenlehre entwickelt zu haben, obwohl die Summierung besonderer, etwa geometrischer Reihen, schon vor ihm von Cataldi, Torricelli und Gregorio da San Vincenzo vollzogen worden war. Eneström [Bibl. Math., III. s. 12, 135—148 (1912)] hat in der diesbezüglichen Analyse der „Novae

quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum“ (1650) Mengolis dessen Ergebnisse nicht voll gewürdigt, daher gibt Verf. einen erschöpfenden Gesamtüberblick über Mengolis Reihenlehre. Es handelt sich durchweg um unendliche Reihen mit positiven Gliedern, die meist als Strecken gedeutet sind. Mengoli besitzt bereits unsern Limesbegriff und beweist die Summenexistenz aus der Monotonie und Beschränktheit der Teilsummen. Den Beweis dafür, daß  $s$  der Summenwert sei, führt Mengoli durch den direkten Nachweis, daß es kein  $s_n > s$  gibt und daß zu jeder unterhalb  $s$  liegenden Zahl eine sie übertreffende Teilsumme vorhanden ist. Dabei spielt die tatsächliche Berechnung von  $s_n$  und des Restes  $s - s_n$  eine wesentliche Rolle. Die von Mengoli summierten Reihen sind von folgenden Typen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b+na)(b+(n+1)a)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b+na)(b+(n+1)a)(b+(n+2)a)}$$

usw. mit ganzen positiven  $a, b$  und schließlich, unter Befreiung von arithmetischen Folgen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+r} - a_n}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+r}},$$

wenn  $a_1, a_2, \dots$  eine monoton wachsende konvergente oder divergente Folge beliebiger Zahlen bilden. Die harmonische Reihe weist Mengoli als divergent nach.

Harald Geppert (Berlin).

**Akademienmitglied Boris Grigorjevič Galerkin zu seinem 70. Geburtstag und zum 45jährigen Jubiläum seiner wissenschaftlichen Tätigkeit.** Bull. Acad. Sci. URSS, Cl. Sci. techn. Nr 4, 115—120 (1941) [Russisch].

**Montel, Paul:** Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 197—200 (1941).

**Hofmann, Jos. E.:** Johannes Tropfke (14. X. 1866 bis 10. XI. 1939). Deutsche Math. 6, 114—118 (1941).

Wissenschaftliche Würdigung. Schriftenverzeichnis.

Harald Geppert.

## Analysis.

● **Brillouin, Léon:** Notions élémentaires de mathématiques pour les sciences expérimentales. A l'usage des candidats au certificat d'études physiques chimiques et biologiques et à la licence ès sciences. 2. édit. Paris: Masson & Cie. 1939. X, 283 pag. ffrs. 40.—

Ein Büchlein zur Einführung in die Mathematik für den angehenden Naturwissenschaftler, das mit glücklicher Hand geschrieben ist und an trefflich gewählten Beispielen das Wesentliche aus den Hauptpunkten der Differential- und Integralrechnung sagen kann, dazu sogar einiges über Wahrscheinlichkeiten und Statistik. Ohne peinlich zu werden, vermag Verf. doch eine saubere, ansprechende und einleuchtende Darstellung zu geben.

Ulrich (Gießen).

## Mengenlehre:

**Licheri, Augusto:** Una questione elementare sulla teoria degli insiemi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 10, 121—122 (1940).

**Piccard, Sophie:** Sur les ensembles de distances. (120. Jahresvers., Locarno, Sitzg. v. 28.—30. IX. 1940.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 104—105 (1940).

Es wird über die an anderen Orten erschienenen Untersuchungen der Verf. berichtet. (Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien. Neuchâtel 1939; dies. Zbl. 23, 18; 25, 33.)

L. Eged (Budapest).



**Shirai, Tameharu:** On the relations between the set and its distances. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 22, 369—375 (1939).

Es werden Bedingungen angegeben, unter welchen eine auf einer Menge  $E$  definierte Funktion  $f(x, y)$  als Abstand zweier Punkte  $x, y$  von  $E$  aufgefaßt werden kann. *G. Alexits* (Budapest).

**Denjoy, Arnaud:** Représentation conjointe de l'ordination et de l'énumération d'un ensemble dénombrable, par un nombre ou par une figure plane. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 885—888 (1941).

Für eine geordnete abzählbare Menge ist eine Reihenfolge  $e_0, e_1, \dots$  ihrer Elemente festgelegt. Es wird durch Verf. eine Methode angegeben, wie der Ordnungstypus der Menge und zugleich die Reihenfolge ihrer Elemente sich durch eine Zahl bzw. durch eine Figur kennzeichnen lassen. Gibt es  $a_n$  Elemente unter  $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ , die vor  $e_n$  stehen, so ist die erwähnte Zahl  $\sum a_n/(n+1)!$ . Dieser Zahl wird eine Figur zugeordnet, die durch Verbinden gewisser Gitterpunkte entsteht. Gewisse Eigenschaften der ursprünglichen Menge sind an dieser Figur anschaulich erkennbar. *G. Hajós*.

**Gillis, J.:** Tehebycheff polynomials and the transfinite diameter. Amer. J. Math. 63, 283—290 (1941).

Es bezeichne  $l(x)$  für  $x \neq 0$  die Funktion  $\frac{1}{\log 1/x}$ , für  $x = 0$  setze man  $l(0) = 0$ . Bedeutet  $\tau(E)$  den transfiniten Durchmesser der abgeschlossenen ebenen Menge  $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ , so lassen sich die folgenden Sätze aussprechen: 1. Liegt  $E$  im Einheitskreis, so gilt  $l[\tau(E)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} l[\tau(E_n)]$ . 2. Liegt  $E$  in einem konvexen Bereich vom Durchmesser  $\delta$ , so gilt  $l[1/\delta \cdot \tau(E)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} l[1/\delta \cdot \tau(E_n)]$ . Außer diesen Sätzen beweist Verf., daß 1. auch dann richtig bleibt, wenn  $E$  nicht mehr eben, sondern als Teilmenge einer Sphäre vom Radius  $1/4$  eines vollständigen und lokal kompakten metrischen Raumes angenommen wird. *G. Alexits* (Budapest).

**Best, E.:** A theorem on Hausdorff measure. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 243—248 (1940).

Es wird eine Charakterisierung der Hausdorffschen Dimensionsfunktion einer speziellen Mengenkasse gegeben. *L. Egged* (Budapest).

## **Differentiation und Integration reeller Funktionen:**

**Smiley, M. F.:** Measurability and modularity in the theory of lattices. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 76—78 (1941).

Es sei  $L$  ein Verband. Das geordnete Paar  $(a, b)$  mit  $a \in L, b \in L$  heiße modular, in Zeichen  $(a, b)M$ , falls  $(a_1 + a)b = a_1 + ab$  für alle  $a_1 \leq b$ . Ferner werde  $c \in L$  als  $\mu$ -meßbar bezeichnet, unter  $\mu(a)$  eine in  $L$  definierte, eindeutige reelle Funktion verstanden, falls  $\mu(c) + \mu(b) = \mu(c + b) + \mu(cb)$  für alle  $b \in L$  gilt. Es heiße ferner  $\mu$  eigentlich, wenn aus  $a \leq b$  und  $\mu(a) = \mu(b)$  folgt:  $a = b$ . Die Gesamtheit aller  $\mu$ -meßbaren  $c \in L$  sei  $L(\mu)$ . Unter der Annahme, daß  $\mu(a)$  eigentlich ist, wird gezeigt: Vor. Es sei  $c_1 \in L(\mu)$  für jedes  $c_1 \leq c$ , wobei  $c \in L$ . Beh. Es ist  $(b, a)M$  für jedes  $a \leq c$  und jedes  $b \in L$ , ferner ist  $x = ax + b$  für jedes  $x \in L$  mit  $b \leq x \leq a + b$ . — Gelten speziell in  $L$  die beiden Kettensätze, besitzt ferner jede, zwei Elemente  $a, b$  von  $L$  verbindende Kette (principal chain) die feste Länge  $n(a, b)$  und wird  $\mu(a) = n(0, a)$  gesetzt, wo 0 das kleinste Element von  $L$  ist, so folgt umgekehrt aus der Beh. die Vor. *Haupt* (Erlangen).

**Linés Escardó, E.:** Über das mittlere Maß einer linearen nicht begrenzten Menge. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 1, 43—51 (1941) [Spanisch].

Es sei  $C$  eine meßbare Punktmenge der Halbgeraden  $0 \leq x < +\infty$  und  $\varphi(x)$  ihre charakteristische Funktion. Es sei  $\alpha(x)$  eine meßbare Funktion, für die Verf. an-

scheinend nur die folgenden Bedingungen aufstellt

$$(*) \quad \int_0^{+\infty} \alpha(x) dx = +\infty, \quad \int_0^t |\alpha(x)| dx : \left| \int_0^t \alpha(x) dx \right| = O(1).$$

Wir sagen, daß  $C$  ein mittleres  $\alpha(x)$ -Maß in  $(0, \infty)$  hat, wenn der Limes

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \varphi(x) \alpha(x) dx : \int_0^t \alpha(x) dx$$

existiert. Für jedes ganze  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , nennen wir  $C'_n$  die Menge der Punkte  $x$ , die im Intervall  $(n, n+1)$  enthalten sind, und  $C_n$  die Menge der Punkte  $x$  von  $(0, 1)$ ,

die man aus  $C'_n$  mittels einer Translation um  $n$  erhält. Es sei  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=n}^{\infty} C_r$ . Verf.

behauptet unter anderem, daß, wenn  $C$  ein mittleres Maß  $\sigma$  hat,  $|E| \geq \sigma$  gilt. Dieser Satz ist trivial für  $\alpha(x) \equiv 1$ ; für  $\alpha(x) \not\equiv 1$  ist er unter den Voraussetzungen (\*) allein falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:  $\alpha(x) = 1$  für  $n \leq x \leq n + \frac{1}{2}$ ,  $\alpha(x) = 0$  für

$n + \frac{1}{2} < x < n + 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $C = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n$ ,  $C'_n \equiv (n, n + \frac{1}{2})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Die Funktion  $\alpha(x)$  genügt (\*), und man erhält  $\sigma = 1$ . Jedoch  $E \equiv (0, \frac{1}{2})$  und deshalb  $|E| = \frac{1}{2} < \sigma$ . Für weitere Sätze sei auf die Arbeit verwiesen. *L. Cesari (Pisa)*.

**Halmos, Paul R.:** The decomposition of measures. *Duke math. J.* 8, 386—392 (1941).

$\mathfrak{B}$  sei ein Borelscher Mengenkörper in  $\Omega$ ,  $\Omega \in \mathfrak{B}$  und  $m$  eine Maßfunktion in  $\mathfrak{B}$ ,  $m(\Omega) = 1$ . Die Punkte von  $\Omega$  seien durch zwei Koordinaten  $(x, y)$  beschreibbar, wobei  $x$  eine feste Menge  $X$  und  $y$  eine evtl. von  $x$  abhängige Menge  $Y_x$  durchläuft.  $\mathfrak{X}$  sei ein Borelscher Mengenkörper in  $X$ ,  $X \in \mathfrak{X}$  und  $\mu$  eine Maßfunktion in  $\mathfrak{X}$ ,  $\mu(X) = 1$ . Für  $x \in X$  sei  $\mathfrak{Y}_x$  ein Borelscher Mengenkörper in  $Y_x$ ,  $Y_x \in \mathfrak{Y}_x$  und  $\nu_x$  eine Maßfunktion in  $\mathfrak{Y}_x$ ,  $\nu_x(Y_x) = 1$ . Die Maßfunktion  $m$  heißt direkte Summe der Maßfunktionen  $\nu_x$ , wenn  $m(E) = \int_X \nu_x(E \cdot Y_x) d\mu(x)$  für jedes  $E \in \mathfrak{B}$  ist. Verf. beweist den Satz:  $\Omega, \mathfrak{B}$

und  $m$  seien vorgegeben. Ferner liege ein Borelscher Unterkörper  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{B}$  vor,  $\Omega \in \mathfrak{A}$ . Sowohl  $\mathfrak{A}$  als  $\mathfrak{B}$  seien durch abzählbar viele Elemente erzeugbar. Dann gibt es ein  $A_0 \in \mathfrak{A}$  mit  $m(A_0) = 0$  derart, daß bei Vernachlässigung von  $A_0$   $m$  eine direkte Summe ist, wobei  $\mathfrak{A}$  das System der Mengen der Punkte  $(x, y) \in \Omega$  mit festem  $x$  ist. Als Anwendung wird ein neuer Beweis eines Satzes von v. Neumann geliefert über Zerlegung von maßerhaltenden Transformationen in ergodische Transformationen [*Ann. of Math.*, II. s. 33, 587—642 (1932); dies. Zbl. 5, 122]. Weitere Anwendungen werden in Aussicht gestellt. *J. Novák (Brünn)*.

**Reichelderfer, P., and L. Ringenberg:** The extension of rectangle functions. *Duke math. J.* 8, 231—242 (1941).

Verff. beweisen einen Satz über die Erweiterung des Definitionsbereiches einer Mengenfunktion. — Es sei  $R_0$  das Rechteck  $0 \leq x \leq x_0$ ,  $0 \leq y \leq y_0$  und  $K$  eine Klasse von in  $R_0$  liegenden Punktmengen;  $K$  heißt (in bezug auf  $R_0$ ) abgeschlossen, wenn sie alle (in bezug auf  $R_0$ ) offenen Teilmengen von  $R_0$  enthält und wenn aus  $e \in K$ ,  $e_1 \in K$ ,  $e_2 \in K$ , ... folgt  $(R_0 - e) \in K$ ,  $\sum_n e_n \in K$ . Dann lautet der Satz so: Es seien

$c$  die Menge der abgeschlossenen, achsenparallelen Rechtecke aus  $R_0$ ,  $\varphi$  eine in  $c$  gegebene Mengenfunktion,  $r_1, r_2, \dots$  punktfremde Elemente aus  $C$  und  $R_1, R_2, \dots$  Elemente von  $C$ ; notwendig und hinreichend dafür, daß  $\varphi$  sich zu einer vollständig additiven, auf einer abgeschlossenen Mengenfamilie gegebenen Mengenfunktion erweitern läßt, ist, daß aus  $\sum_m r_m \subset \sum_m R_m$  folgt  $\sum_m \varphi(r_m) \leq \sum_m \varphi(R_m)$ . In der Voraussetzung kann

man die abgeschlossenen, achsenparallelen Rechtecke durch abgeschlossene Rechtecke, offene Rechtecke und offene, achsenparallele Rechtecke ersetzen. — Die Verff. erinnern auch an einen Caccioppolisches Satz über die Erweiterung des Definitions-



bereiches einer Mengenfunktion [Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. e Nat. Napoli **33**, 150 bis 153 (1927)]; den Verff. zufolge wäre dieser Satz falsch. Eine ähnliche Behauptung haben Radò und Reichelderfer [Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 258—307 (1941); dies. Zbl. **24**, 387] ebenfalls geäußert: wir verweisen dafür auf das entsprechende Referat.

*G. Scorza Dragoni (Padova).*

**Radó, T., and P. Reichelderfer:** Note on an inequality of Steiner. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 102—108 (1941).

Für eine im Quadrat  $Q: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  stetige Funktion  $f(x, y)$  bezeichnen wir mit  $L(f)$  den Lebesgueschen Flächeninhalt der Fläche  $z = f(x, y)$ . Nach der Steinerschen Ungleichung für je zwei in  $Q$  stetige Funktionen  $f_1, f_2$  gilt die Beziehung  $M(f_1, f_2) = \frac{1}{2}[L(f_1) + L(f_2)] - L(\frac{1}{2}[f_1 + f_2]) \geq 0$ . McShane hat [Ann. of Math., II. s. **33**, 125—138 (1932); dies. Zbl. **3**, 327] folgendes bewiesen: 1. Wenn  $L(f_1) < G (< +\infty)$ ,  $L(f_2) < G$  und  $[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2]^{\frac{1}{2}} > \varepsilon > 0$  in einer Menge, deren Maß positiv und größer als  $\delta > 0$  ist, dann ist  $M(f_1, f_2) > \mu(G, \varepsilon, \delta) > 0$  (dabei sind  $p_i, q_i$  die ersten Ableitungen von  $f_i$  nach  $x$  und  $y$ ). 2. Wenn die in  $Q$  stetigen Funktionen  $f_1, f_2, f_3, \dots$  gleichmäßig gegen  $f_0$  konvergieren mit  $L(f_n) \rightarrow L(f_0) < +\infty$ , dann konvergiert  $[(p_n - p_0)^2 + (q_n - q_0)^2]^{\frac{1}{2}}$  im Maß gegen Null (d. h. es gibt keine Teilfolge  $f_{n_k}, f_{n_k}, \dots$  und keine positiven Zahlen  $\varepsilon$  und  $\delta$  so, daß die Ungleichungen  $[(p_{n_k} - p_0)^2 + (q_{n_k} - q_0)^2]^{\frac{1}{2}} > \varepsilon$  in Mengen, deren Maße größer als  $\delta$  sind, gelten). Nun beweisen Verff. 1) wenn  $L(f_1) < +\infty, L(f_2) < +\infty$ , dann ist

$$\left\{ \int_Q [(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2]^{\frac{\lambda}{2}} dx dy \right\}^{\frac{2}{\lambda}} \leq [L(f_1) + L(f_2)]^3 \cdot M(f_1, f_2), \quad \text{für } 0 < \lambda \leq \frac{1}{2},$$

$$\leq [L(f_1) + L(f_2)]^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \cdot M(f_1, f_2)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1.$$

II) Unter den Voraussetzungen von 2. ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q [(p_n - p_0)^2 + (q_n - q_0)^2]^{\frac{\lambda}{2}} dx dy = 0$ , für  $0 < \lambda < 1$ . *G. Scorza Dragoni (Padova).*

**Haupt, Otto:** Zur Bestimmung des Oberflächenmaßes vermittelt geometrisch ausgezeichneter Polyederfolgen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **51**, 170—192 (1941).

$F$  sei ein umkehrbar dehnungsbeschränktes (und folglich topologisches) Bild im euklidischen Raume  $E_n$  der  $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$  eines  $k$ -dimensionalen Würfels  $W$  des euklidischen Raumes  $E_k$  der  $U \equiv (u_1, \dots, u_k)$ . Die Abbildung von  $W$  auf  $F$  sei durch  $x_v = f_v(u_1, \dots, u_k)$ ,  $v = 1, \dots, n$ , erklärt. Dann ist bekanntlich  $f_v$  fast überall auf  $W$

differenzierbar und  $Q(U) = \left| \sqrt{\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \left[ \frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \right]^2} \right|$  fast überall  $> 0$ . —

Jetzt betrachten wir eine Folge  $\{N_\varrho(u)\}$  von simplizialen Zerlegungen von  $W$ . Durch die den Eckpunkten eines jeden Simplex von  $N_\varrho(u)$  entsprechenden Bildpunkte auf  $F$  wird ein Simplex in  $E_n$  aufgespannt; somit bekommt man eine Folge  $N_\varrho(x)$  von in  $F$  eingeschriebenen Simplexnetzen. Es seien  $m_\varrho(u)$ ,  $m_\varrho(x)$  die maximale Kantenlänge der Simplizes von  $N_\varrho(u)$  bzw.  $N_\varrho(x)$ . Jetzt machen wir die zusätzliche Annahme, daß die  $f_v$  überall auf  $W$  gleichmäßig differenzierbar sind, und daß die  $\{N_\varrho(x)\}$  flachheitsbeschränkt sind (d. h. abgesehen von höchstens endlich vielen der Simplizes ist der Quotient zwischen größter Kantenlänge und kleinster Höhe nach oben beschränkt). Dann gilt: 1) wenn  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} m_\varrho(x) = 0$  ist, konvergiert die Inhaltssumme der Simplizes von  $N_\varrho(x)$  mit  $\varrho \rightarrow \infty$  gegen  $\int_W Q(U) dU$ ; 2) es ist  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} m_\varrho(x) = 0$  dann und nur dann,

wenn  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} m_\varrho(u) = 0$  ist; 3) die Simplizes von  $\{N_\varrho(x)\}$  sind flachheitsbeschränkt dann und nur dann, wenn dasselbe für die Simplizes von  $\{N_\varrho(u)\}$  gilt. — Verff. verallgemeinert diese Resultate auch auf die Fälle, daß die  $f_v(x)$  nahezu gleichmäßig differenzierbar sind oder, daß die Abbildung von  $W$  auf  $F$  lediglich umkehrbar dehnungsbeschränkt ist.

*G. Scorza Dragoni (Padova).*



**Schwartz, Laurent:** Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 331—333 (1941).

Sei  $C$  eine euklidische Kurve,  $P_A$  ein in  $C$  eingeschriebenes Polygon mit der größten Seitenlänge  $\nu(P_A)$  und bezeichne  $\delta_A(M)$  den Abstand des Punktes  $M \in C$  von jener Seite des Polygons  $P_A$ , zwischen deren Endpunkten  $M$  liegt. Ist  $C$  rektifizierbar, so ist  $\delta_A(M)$  eine Funktion von beschränkter Variation und  $\int_C |d\delta_A(M)|$  konvergiert mit  $\nu(P_A)$  bei jeder Einteilung von  $C$  gegen Null. G. Alexits (Budapest).

**Gonçalves, J. Vicente:** Contours de Jordan et intégrale de Cauchy. Portugaliae Math. **2**, 166—172 (1941).

Es wird eine geschlossene Jordankurve  $z = \varphi(t)$  durch geschlossene Polygone approximiert. Daß aber daraus, wie es Verf. zu behaupten scheint (S. 168), ohne weiteres der Jordansche Kurvensatz folgt, ist nicht klar. Diese Approximation wird auch für den Beweis des Schönfliesschen Satzes über die innere und äußere Erreichbarkeit der Punkte einer Jordankurve benutzt. Schließlich wird eine Anwendung auf den Satz von Cauchy-Goursat (wo nur die Stetigkeit der Funktion auf der Randkurve vorausgesetzt ist) angedeutet. Die Schlußweise des Verf., der sich hier scheinbar auf eine seiner früheren Arbeiten stützt [Sur l'intégrale prise sur un contour variable. Portugaliae Math. **1**, 343—345 (1940); dies. Zbl. **24**, 25], ist aber nicht richtig oder scheint jedenfalls dem Ref. nicht klar zu sein. Stoilow.

**Kershner, Richard:** On non-equidistributed averages. Amer. J. Math. **63**, 611—614 (1941).

Verf. beweist durch einfache Schlüsse das folgende allgemeine Prinzip bzgl. der Approximation von Integralen durch nicht gleichverteilte Riemannsche Summen: Es sei  $\{x_j^r\}$  ( $r = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, n_r$ ) eine unendliche Folge von endlichen Folgen, für die jeweils  $0 \leq x_1^r \leq x_2^r \leq \dots \leq x_{n_r}^r \leq 1$  gilt. Sie besitze eine totalstetige asymptotische Verteilungsfunktion  $\Phi(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(x)$ , wo  $\Phi_r(x) = \frac{1}{n_r} \times \text{Anzahl der } x_j^r \leq x$  ist), mit einer Dichte  $\delta(x)$ , die in  $\langle 0, 1 \rangle$  im Riemannschen Sinne integrierbar und  $\neq 0$  ist. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} g(x_j^r) / \delta(x_j^r) = \int_0^1 g(y) dy$$

für jede in  $\langle 0, 1 \rangle$  im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion  $g(y)$ . — Hierin sind als Spezialfälle Ergebnisse von F. John [Math. Ann. **110**, 718—721 (1935); dies. Zbl. **10**, 254] und von G. Pólya [Math. Ann. **88**, 169—183 (1923), insbes. S. 173] enthalten.

F. Lösch (Rostock).

**Reid, William T.:** Green's lemma and related results. Amer. J. Math. **63**, 563—574 (1941).

Es bedeute  $R$  das Innere einer ebenen, einfach geschlossenen rektifizierbaren Kurve  $J$ . In beliebiger Umgebung der Kurve  $J$  von der Länge  $L$  gibt es in  $R$  ein geschlossenes Polygon, dessen Länge kleiner als  $5L$  ist und dessen Seiten den Achsen parallel sind. Eine Funktion  $f(x, y)$  hat die Eigenschaft  $\alpha$  [bzw.  $\beta$ ], falls folgende Bedingungen erfüllt sind: 1)  $f(x, y)$  ist in  $R + J$  stetig; 2) Ist  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  ein Rechteck in  $R$ , so ist  $f(x, y_0)$  in  $a \leq x \leq b$  absolut stetig für  $y_0$  fast überall in  $c \leq y \leq d$  [bzw. so ist  $f(x_0, y)$  in  $c \leq y \leq d$  absolut stetig für  $x_0$  fast überall in  $a \leq x \leq b$ ]; 3)  $\frac{\partial f}{\partial x}$  [bzw.  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ] ist in  $R$  integrierbar. Das Hauptresultat der Arbeit ist in folgenden zwei Sätzen enthalten: Es sei  $M(x, y)$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $\alpha$ ; dann ist  $\iint_R \frac{\partial M}{\partial x} dx dy = \int_J M(x, y) dy$ . Es sei  $N(x, y)$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $\beta$ ; dann ist  $\iint_R \frac{\partial N}{\partial y} dx dy = - \int_J N(x, y) dx$ . Mit Hilfe dieser Sätze beweist man leicht die Greensche Formel: Hat  $M(x, y)$  die Eigenschaft  $\alpha$  und  $N(x, y)$  die Eigenschaft  $\beta$ , so gilt:

$$\iint_R \left[ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right] dx dy = \int_J (M dy + N dx).$$

J. Novák (Brünn).

**Cameron, R. H., and W. T. Martin: An unsymmetric Fubini theorem.** Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 121—125 (1941).

Es wird folgendes unsymmetrische Vertauschungstheorem bewiesen: Vor. Es sei  $s(u)$  Borel-meßbar in  $(-\infty, +\infty)$ . Es sei  $k(x)$  von beschränkter Variation in jedem endlichen  $x$ -Intervall. Ferner sei  $p(x, u)$  Borel-meßbar hinsichtlich  $(x, u)$ , und es sei  $p(x, u)$  als Funktion von  $u$  in jedem endlichen  $u$ -Intervall von beschränkter Variation, und zwar für fast alle  $x$  bezüglich  $k(x)$ . Ist  $V(x, u) = \int_{u+0}^{u+0} |d_v p(x, v)|$  für  $u \geq 0$  und  $V(x, u) = -\int_{u+0}^{u+0} |d_v p(x, v)|$  für  $u < 0$ , so sei  $\int_{-\infty}^{+\infty} V(x, u) |dk(x)|$  endlich (existiere) für alle  $u$  in  $(-\infty, +\infty)$ . — Beh. Aus der Endlichkeit (Existenz) von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(u)| d_u \left( \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, u) |dk(x)| \right)$$

folgt die von  $\int_{-\infty}^{+\infty} |dk(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |s(u)| |d_u p(x, u)|$  und umgekehrt. Im Falle ihrer Existenz sind beide Integrale gleich, und weiter existieren (und sind gleich):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(u) d_u \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u) dk(x) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk(x) \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) d_u p(x, u).$$

Der Beweis wird zunächst unter einschränkenden Annahmen geführt, welche dann schrittweise gelockert werden. *Haupt (Erlangen).*

**Binaud, René: Sur une généralisation du théorème de Guldin.** C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 41—43 (1941).

Die Pappus-Guldinsche Regel über das Volumen der Rotationskörper wird wesentlich verallgemeinert, und es werden einige damit zusammenhängende Sätze ausgesprochen. Ist die geschlossene Raumkurve  $K$  der Rand eines Flächenstückes  $F$ , so wird die (nur von  $K$  abhängende) Poinsoische Zentralachse der Normaleinheitsvektoren an  $F$  durch Verf. als Guldinsche Achse  $g$  von  $K$  bezeichnet; projiziert man  $K$  auf eine auf  $g$  senkrechte Ebene, so wird der Inhalt des durch diese Projektion begrenzten Bereiches Inhalt von  $K$  genannt. Dreht man  $K$  um eine Rotationsachse  $r$ , so ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers  $A \cdot 2\pi$  ( $\rho \sin \alpha - h \cos \alpha$ ), wobei  $A$  den Inhalt von  $K$ ,  $\rho$  den Abstand der Achsen  $g$  und  $r$ ,  $\alpha$  den Winkel dieser Achsen,  $h$  eine nur von  $K$  abhängende Konstante bedeuten. *G. Hajós (Budapest).*

**Agnew, Ralph Palmer: On continuity and periodicity of measurable functions.** Ann. of Math., II. s. **41**, 727—733 (1940).

Es seien  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $F(t)$  usw. eindeutig, komplexwertig und Lebesgue-meßbar im Definitionsbereich  $(-\infty < t < +\infty)$ . Es wird folgendes gezeigt: 1) Es existiert zu beliebig gegebenem  $f(t)$  eine fallend gegen Null konvergierende Folge (positiver) Zahlen  $K_v$  derart, daß für jede Folge reeller Zahlen  $k_v$  mit  $|k_v| < K_v$  gilt:  $\lim_{v \rightarrow \infty} f(t + k_v) = f(t)$  ausgenommen eine von  $\{k_v\}$  abhängige Nullmenge von Werten  $t$ . Es gibt aber Funktionen  $F(t)$  und dazu fallende Nullfolgen  $\{g_v\}$  mit  $\lim_{v \rightarrow \infty} |F(t + g_v) - F(t)| > 0$  für fast alle  $t$ . — 2) Es heiße  $f(t)$  im wesentlichen (w.) periodisch mit der w. Periode  $p \neq 0$  bzw. w. konstant gleich  $c$ , wenn fast überall  $f(t) - f(t + p) = 0$  bzw. fast überall  $f(t) = c$ . Es gilt: Ist  $f(t)$  w. periodisch, aber nicht w. konstant, dann existiert eine kleinste positive w. Periode  $p_0$ , d. h. eine w. Periode  $p_0$  derart ( $p_0 > 0$ ), daß jede w. Periode von  $f(t)$  ganzzahliges Vielfaches von  $p_0$  ist. Ebenso besitzt jede periodische, nicht w. konstante Funktion  $f(t)$  eine kleinste positive Periode. — Ein aus 1) gewonnenes Hilfsmittel beim Beweise von 2) ist die Unterhalbstetigkeit hinsichtlich  $\lambda$  der „meßbaren oberen Grenze“ der (reellen meßbaren) Funktion  $h(t) = |f(t + \lambda) - f(t)|$ , d. h. die kleinste Zahl  $\alpha$  mit  $h(t) \leq \alpha$  für fast alle  $t$  aus  $(-\infty, +\infty)$ ; dabei ist  $\alpha = +\infty$  zugelassen. *Haupt (Erlangen).*



**Mulholland, H. P.:** On the total variation of a function of two variables. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 290—311 (1940).

Sia  $f(x, y)$  continua in una regione chiusa, convessa  $R$  del piano  $x, y$  e denotino  $T_x[y; f; R] = \int |df(t, y)|$ ,  $T_y[x; f; R] = \int |df(x, t)|$  le variazioni totali di  $f(x, y)$  in quanto funzioni risp. della sola  $x$  e della sola  $y$ . Si ponga  $\xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$ ,  $\eta = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta$  e si indichi con  $R^\vartheta$  la regione ottenuta da  $R$  mediante una rotazione dell'angolo intorno all'origine, mentre si porrà  $f^\vartheta(x, y) = f(\xi, \eta)$  [ove  $(x, y)$

è in  $R^\vartheta$ ],  $W(\vartheta) = W[\vartheta; f; R] = \int T_x[y; f^\vartheta; R^\vartheta] dy$ . Allora  $V_R[f] = \frac{1}{2} \int_0^\pi W[\vartheta; f; R] d\vartheta$

è la variazione totale di  $f$ ;  $V_R[f]$  è finita se e solo se  $\int T_x[y; f; R] dy$ ,  $\int T_y[x; f; R] dx$  sono entrambi finiti, cioè se e solo se  $f(x, y)$  è a variazione limitata secondo Tonelli. Supponiamo che  $f(x, y)$ , continua in  $R$ , vi sia a variazione totale finita. Detto  $E$  un insieme di Borel contenuto in  $R^\vartheta$ , sia  $\Sigma^\vartheta(E)$  l'insieme superficiale  $z = f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)$ , con  $(x, y)$  in  $E$ , ed  $N_x[y; z; \vartheta; E]$  denoti il numero dei valori di  $x$  per cui  $(x, y, z)$  è contenuto in  $\Sigma^\vartheta(E)$  allora risulta  $W(\vartheta) = \int dy \int N_x dz = \int \int N_x dy dz = \int dz \int N_x dy$ ; se si pone poi  $P_x[z; \vartheta; E] = \int N_x[y; z; \vartheta; E] dy$ , allora

è  $V_R[f] = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta \int P_x[z; \vartheta; R^\vartheta] dz = \frac{1}{2} \int dz \int_0^\pi P_x[z; \vartheta; R^\vartheta] d\vartheta$ . Si indichi con  $L(S_z)$  la

lunghezza secondo Carathéodory-Gross dell'insieme  $S_z$  del piano  $\xi, \eta$  definito dalla  $f(\xi, \eta) = z$ ; allora per quasi tutti i valori di  $z$  è  $\frac{1}{2} \int_0^\pi P_x[z; \vartheta; R^\vartheta] d\vartheta = L(S_z)$ . L'A. prova inoltre che

$$V_R[f] = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \iint_{R_{\alpha, \beta}} \left\{ \left[ \frac{f(x + \alpha, y) - f(x, y)}{\alpha} \right]^2 + \left[ \frac{f(x, y + \beta) - f(x, y)}{\beta} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy$$

ove  $R_{\alpha, \beta}$  è l'insieme dei punti  $(x, y)$  di  $R$  tali che  $(x + \alpha, y)$  ed  $(x, y + \beta)$  appartengano ancora ad  $R$ ; di guisa che se  $f(x, y)$  ha derivate parziali prime continue la relazione precedente si riduce alla

$$V_R[f] = \iint_R [\nu_x'^2 + \nu_y'^2]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

G. Scorza Dragoni (Padova).

**Maephail, M. S.:** Functions of bounded variation in two variables. Duke math. J. 8, 215—222 (1941).

Es sei eine Funktion  $F(x, y)$  im Rechteck  $R = (a, b; c, d)$  definiert. Ist  $r = (a_0, b_0; c_0, d_0)$  ein Teilrechteck von  $R$ , so sei  $F(r) = F(c_0, d_0) - F(c_0, b_0) - F(a_0, d_0) + F(a_0, b_0)$ . Es sei  $f(x, y)$  eine beliebige integrierbare Funktion in  $R$ . Genügt  $F(x, y)$  den Voraussetzungen: 1. die Summen  $\sum |F(r_i)|$  sind beschränkt, wenn die  $r_i$  disjunkte Teilrechtecke von  $R$  sind; 2.  $F(x, b)$  und  $F(a, y)$  sind Funktionen mit beschränkter Variation, so gibt es eine Folge  $s_n(x, y)$  mit den Eigenschaften: a)  $s_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$  für  $(x, y) \in R$ ; b)  $\int s_n(x, y) dx dy \rightarrow F(a, b; x, y)$ ; c)  $\int s_n(x, y) dx dy$  ist beschränkt in  $n$  und  $e$ , wobei  $(a, b; x, y) \in R$ ,  $e$  meßbar; ist  $F(x, y)$  stetig, so gilt b) gleichmäßig. Wenn  $F(x, y)$  eine beliebige stetige Funktion in  $R$  ist, so gibt es eine Folge  $s_n(x, y)$  mit den Eigenschaften a) und b), wobei b) wieder gleichmäßig gilt;  $f(x, y)$  ist jetzt eine beliebige meßbare Funktion, die keineswegs integrierbar zu sein braucht.

J. Novák (Brünn).

**Misra, R. D.:** On a new non-differentiable function. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 225—228 (1940).

Verf. gab in einer früheren Arbeit [On Hilbert's curve. Proc. Benares math. Soc. 16, 13—34 (1934)] eine parametrische Darstellung der Peano-Hilbertschen Kurve, die das Einheitsintervall  $[0, 1]$  auf das Einheitsquadrat stetig abbildet. Es wird in dieser Note gezeigt, daß diese Parameterfunktionen nichtdifferenzierbare stetige Funktionen sind.

L. Eyged (Budapest).

**Picone, M.:** Sul calcolo delle derivate d'ordine superiore. *Period. Mat.*, IV. s. 21, 141—150 (1941).

Es sei  $f(x)$  eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen  $x$ , die im Intervall  $(a, b)$  definiert ist und dort überall die ersten  $n - 1$  Ableitungen besitzt. Außerdem besitzt  $f(x)$  in einem Punkt  $x$ ,  $a < x < b$ , die  $n$ -te Ableitung. Es sei  $V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  die Vandermondesche Determinante der Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Die Determinante  $W(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$  entsteht aus  $V$ , indem die Reihe  $x_1^n, x_2^n, \dots, x_{n+1}^n$  durch die Reihe  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$  ersetzt wird. Sei

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f) = \frac{W(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}, \quad \sigma = |x_1 - x| + |x_2 - x| + \dots + |x_{n+1} - x|.$$

Es werden elementare Beweise einiger allgemeiner Sätze gebracht, die auch für das komplexe Gebiet ihre Gültigkeit behalten und die unter geeigneten Voraussetzungen die Gleichheit

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f) = f^{(n)}(x)/n!$$

garantieren. Für das komplexe Gebiet weist Verf. auf einige neue Probleme hin.

*L. Cesari (Pisa).*

**Guareschi, Giacinto:** Sul calcolo effettivo degli iperdifferenziali totali delle funzioni di più variabili reali. *Rend. Mat.*, Univ. Roma, V. s. 2, 153—169 (1941).

$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sei eine reelle eindeutige Funktion, die auf einer gewissen Menge  $I$  des  $n$ -dimensionalen kartesischen Raumes definiert ist; nach F. Severi (dies. Zbl. 9, 308) bezeichnet man als totales Hyperdifferential von  $f$  im Häufungspunkt  $A$  von  $I$  den Ausdruck  $df = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$  mit konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , sobald bei beliebiger Art des Strebens der Punkte  $M, N$  auf  $I$  gegen  $A$  die Beziehung  $f(N) - f(M) = df + \varepsilon \overline{MN}$  besteht, in der  $\varepsilon$  eine infinitesimale Größe und  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  die Komponenten des Vektors  $\overline{MN}$  bezüglich der Koordinatenachsen sind. Verf. vertieft die von Severi eingeführten Begriffe der Richtungshyperderivierten und des totalen Hyperdifferentials, indem er insbesondere das Interesse hervorhebt, das diese Begriffe beim Studium des Verhaltens von  $f$  in den Randpunkten von  $I$  (falls  $I$  ein Gebiet ist) beanspruchen. Verf. erörtert Verfahren zur tatsächlichen Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , gibt die geometrischen und analytischen Bedingungen für die Hyperdifferenzierbarkeit an und erläutert die erhaltenen Ergebnisse an einigen eindrucksvollen Beispielen.

*Tullio Viola (Roma).*

**Rinehart, R. F.:** On extrema of functions which satisfy certain symmetry conditions. *Amer. Math. Monthly* 47, 145—152 (1940).

Wird das Extremum von  $S = x_1 x_2 \dots x_n$  unter der Bedingung

$$V = x_1 + x_2 + \dots + x_n - c = 0$$

gesucht, so ist für die Lösung bekanntlich  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . In den meisten Fällen trifft dasselbe zu, wenn nur  $S$  und  $V$  in allen Veränderlichen symmetrisch sind. Der genaue Satz des Verf. lautet: Sind  $S$  und  $V$  in allen Veränderlichen symmetrisch, mit stetigen zweiten Ableitungen, besitzt  $V = 0$  eine Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , ist an dieser Stelle  $V_{x_n} \neq 0$  und

$$\Delta = \frac{1}{V_{x_n}} \begin{vmatrix} S_{x_1 x_1} - S_{x_1 x_n} & S_{x_n} \\ V_{x_1 x_1} - V_{x_1 x_n} & V_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so hat  $S$  an dieser Stelle ein Extremum, und zwar ein Maximum bzw. Minimum, je nach dem  $\Delta < 0$  bzw.  $\Delta > 0$  ist. Bei  $k$  Nebenbedingungen  $V_1 = V_2 = \dots = V_k$  gilt ein analoger Satz, worin die Symmetrie nur in den Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}$  gefordert bzw. behauptet wird; an die Stelle von  $V_{x_n}$  tritt dann die Funktionaldeterminante

$\frac{\partial(V_1, \dots, V_k)}{\partial(x_{n-k+1}, \dots, x_n)}$ , die Determinante in  $\Delta$  wird dementsprechend erweitert.

*G. Hajós (Budapest).*



## Allgemeine Reihenlehre:

**Orts, J. M.:** Zwei Noten über numerische Reihen. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 1, 29—36 (1939) [Spanisch].

Die erste Note enthält eine Konvergenzbedingung für diejenigen Reihen, welche aus der gewöhnlichen harmonischen Reihe entstehen, sobald man deren Glieder gruppenweise mit abwechselnden Vorzeichen versieht, erst  $n_1 +$ , dann  $n_2 -$ , dann  $n_3 +$  usw. Hinreichend ist die Konvergenz von

$$\log n_1 - \log\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) + \log\left(1 + \frac{n_3}{n_1 + n_2}\right) - \dots \quad \text{mit} \quad \frac{n_k}{n_1 + \dots + n_{k-1}} \rightarrow 0.$$

Diese Reihe ist i. a. nur bedingt konvergent. U. a. folgt so die Konvergenz, wenn die  $n_v$  eine arithmetische Reihe beliebiger Ordnung bilden, sowie die Konvergenz von  $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} : n$ . — Die zweite Note gibt eine Verallgemeinerung des klassischen Grenzprozesses, der zur Eulerschen Konstanten führt, und betrachtet für eine Folge  $n_v \uparrow \infty$

$$\frac{1}{n_1} - \log\left(1 + \frac{1}{n_2}\right) + \frac{1}{n_3} - \log\left(1 + \frac{1}{n_4}\right) + \dots$$

Diese konvergenten Reihen sind schon früher verschiedentlich behandelt. *Ullrich.*

**Ríos, S.:** Über die Konvergenzgebiete der Konvergenzalgorithmen ( $E_n$ ), die den Eulerschen Algorithmus verallgemeinern. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 1, 37—44 (1939) [Spanisch].

Verf. hatte als Konvergenzgebiete der von Rey Pastor [Publ. Fac. Ci. exact., Fis. y Nat., Univ. Buenos Aires B 12, 51—222 (1932), insbes. S. 77; dies. Zbl. 8, 307] als Eulersche bezeichneten Konvergenzalgorithmen für die geometrische Reihe das Innere  $\mathfrak{D}_n$  der Lemniskate  $|1 + z + \dots + z^n| = n + 1$  nachgewiesen [Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 7, 37—41 (1932); dies. Zbl. 4, 346]. Elementare Erörterungen zeigen, daß für  $n \neq k$  kein  $\mathfrak{D}_n$  das  $\mathfrak{D}_k$  enthält und umgekehrt. Die Verfahren wachsender verschiedener Stufen zeigen also schon am einfachen Fall der geometrischen Reihe keine monoton wachsenden Konvergenzgebiete ( $E_n$  ist nicht das Euler-Knopp'sche Verfahren). *Ullrich* (Gießen).

**Forsythe, G. E.:** Riesz summability methods of order  $r$ , for  $R(r) < 0$ . Duke math. J. 8, 346—349 (1941).

Es handelt sich um die Vergleichung der beiden durch  $A_r - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{t}\right)^r a_k$  und  $B_r - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{[t]-1} \left(1 - \frac{k}{t}\right)^r a_k$  erklärten Riesz'schen Summierungsverfahren für eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit komplexen Gliedern.  $r$  sei eine komplexe Zahl mit dem Realteil  $\Re(r)$ ,

und für  $a > 0$  sei  $a^r = e^{r \log a}$  mit reellem  $\log a$ . Bekannt ist [vgl. etwa R. P. Agnew, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 532—548 (1933); dies. Zbl. 6, 345]: Für  $-1 < r \leq 1$  sind die Verfahren  $A_r$  und  $B_r$  äquivalent, für gewisse  $r > 1$  sind  $A_r$  und  $B_r$  nicht äquivalent, für  $\Re(r) < -1$  sind  $A_r$  und  $B_r$  nicht äquivalent. Verf. stellt im Fall  $\Re(r) < 0$  ein (kompliziertes) notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Äquivalenz von  $A_r$  und  $B_r$  auf und zeigt mit dessen Hilfe, daß  $A_{-1+i h}$  und  $B_{-1+i h}$  ( $-\infty < h < \infty$ ) dann und nur dann äquivalent sind, wenn  $h = 0$  ist. *Meyer-König* (Stuttgart).

**Amerio, Luigi:** Sulla convergenza delle serie doppie. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 684—698 (1941).

Es sei  $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$  (\*) eine Doppelreihe. Für Doppelreihen sind zahlreiche Konvergenzdefinitionen bekannt [u. a. die Stolz-Pringsheimsche Konvergenz, die nach Reihen, nach Spalten, nach Diagonalen, die in einer Richtung nach Leja, die nach den Cesaro'schen Mitteln  $C(r, s)$ , die nach Poisson usw.]. Die Ausdehnung einiger Sätze für einfache Reihen auf nach Stolz-Pringsheim konvergierende Doppelreihen bietet einige Schwierigkeiten, denen Verf. durch Einführung einer neuen Konvergenzdefinition be-

gegnet. Wir nennen Teilsumme der Doppelreihe (\*) jede Summe der Art  $\bar{s} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} a_{mn}$  in der die endlichen Zahlen  $M_n$  den Bedingungen  $M_0 \geq M_1 \geq \dots \geq M_N \geq 0$  genügen. Verf. nennt die Doppelreihe (\*) gegen den endlichen Wert  $s$  streng konvergierend, wenn jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  eine ganze Zahl  $r$  entspricht, derart, daß für jede  $a_{rr}$  enthaltende Teilsumme  $\bar{s}$ ,  $|\bar{s} - s| < \varepsilon$  gilt. Verf. vergleicht den neuen Konvergenzbegriff mit den schon bekannten, wobei er u. a. bemerkt, daß jede streng konvergierende Doppelreihe nach Stolz und Pringsheim, nach Reihen, Spalten (und außerdem nach Diagonalen und in jeder Richtung nach Leja) konvergiert. Verf. beweist ebenfalls, daß es mit Hilfe des neuen Konvergenzbegriffes möglich ist, die bekannten Reihensätze von Abel und Mertens auf Doppelreihen auszudehnen, d. h. 1. daß jede streng konvergierende Doppelreihe auch nach Poisson gegen dieselbe Summe konvergiert, 2. daß die Produktdoppelreihe einer streng konvergierenden Doppelreihe und einer absolut konvergierenden Doppelreihe streng konvergiert. — Ref. hat in zwei demnächst erscheinenden Arbeiten unter ausschließlicher Anwendung bekannter Konvergenzbegriffe durchaus befriedigende Ausdehnungen der Sätze von Abel und Mertens erlangt. L. Cesari (Pisa).

**Nigam, Tapeswari Prasad:** Summability of multiple series. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 249—269 (1940).

Verf. untersucht die Transformation mehrfacher unendlicher Reihen und beschränkt sich in der Ausführung auf Doppelreihen (\*)  $\sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}$ . Im Anschluß an H. J. Hamilton [Duke math. J. 2, 29—60 (1936); dies. Zbl. 13, 303; Bull. Amer. Math. Soc. 42, 275—283 (1936); dies. Zbl. 14, 15] wird erklärt, was bei einer solchen Reihe bzw. bei der zugehörigen Folge  $s_{kl}$  der Teilsummen unter (1) konvergent, (2) beschränkt und konvergent, (3) regulär konvergent, (4) schließlich regulär konvergent, (5) beschränkt und schließlich regulär konvergent zu verstehen ist. Während der genannte Autor in seiner ersten Arbeit die Folge  $s_{kl}$  mit Hilfe einer Matrix  $a_{k,l,m,n}$  in eine Folge  $\sigma_{k,l} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{k,l,m,n} s_{m,n}$  überführt und dann  $(p) \rightarrow (q)$ -Kriterien ( $p, q = 1, 2, \dots, 5$ ) aufstellt, transformiert Verf. die Reihe (\*) direkt mit Hilfe einer Matrix  $g = g_{kl}(a, b)$  (wobei  $a$  und  $b$  etwa positive ganze Zahlen sind) in eine Folge (\*\*)  $\gamma(a, b) = \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}(a, b) c_{kl}$ .

Es handelt sich nun um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen  $g$  genügen muß, damit aus der Eigenschaft  $(p)$  von (\*) stets die Eigenschaft  $(q)$  von (\*\*) folgt, einmal (Typus II) mit der Forderung  $\lim \gamma(a, b) = \sum c_{kl}$ , zum andernmal (Typus I) ohne diese Forderung. Das ergibt bei  $p, q = 1, 2, \dots, 5$  für jeden Typus 25 Sätze, also insgesamt 50 Sätze, die alle angegeben werden. Nur teilweise ist ein umfangreicherer Beweis notwendig, viele Sätze folgen kurz aus früheren, zum Teil auch beschränkt sich Verf. auf einen kurzen Hinweis. Einige in der Literatur vorliegende, bei Hamilton wiedergegebene Teilergebnisse, die sich auf den Fall  $g_{kl}(a, b)$  unabhängig von  $a$  und  $b$  beziehen, werden als Hilfssätze benützt. Meyer-König.

**Hadwiger, H.:** Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum. Math. Z. 47, 325—329 (1941).

Für eine konvergente Reihe sind noch folgende Gegensatzpaare möglich: absolute Konvergenz oder nicht, bedingte Konvergenz oder nicht (die Existenz der Summe hängt von der Anordnung ab), bedingte Summe oder nicht (der Wert der Summe hängt von der Anordnung ab). Sind die Glieder der Reihe Zahlen oder Vektoren eines euklidischen Raumes endlicher Dimension, so besagen diese Gegensatzpaare dasselbe: Eine Reihe ist entweder absolut konvergent und dann unbedingt konvergent und von unbedingter Summe, oder keine der drei Aussagen trifft zu. Sind jedoch die Glieder Vektoren im Hilbertschen Raum, so bedeuten die Gegensatzpaare verschiedenes. Verf.



gibt ein Beispiel einer unbedingt konvergenten Reihe von unbedingter Summe, die nicht absolut konvergiert, ferner ein Beispiel einer Reihe von unbedingter Summe, die bedingt und nicht absolut konvergiert. Aus der absoluten Konvergenz folgt auch hier die unbedingte Konvergenz und daraus die Unbedingtheit der Summe.

Ott-Heinrich Keller (Flensburg-Mürwik).

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Puig Adam, E.: Vereinfachter Beweis der Moivre-Stirlingschen Formel und geometrische Bestimmung des Fehlers. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 1, 21—26 (1939) [Spanisch].

Shohat, J.: The best polynomial approximation of functions possessing derivatives. Duke math. J. 8, 376—385 (1941).

Zu einer vorgegebenen stetigen Funktion  $f(x)$  im Intervall  $(a, b)$  bezeichne  $\Pi_n(x; f)$  das Polynom bester Annäherung des Grades  $\leq n$ . Dann gibt es bekanntlich unter den „Deviationspunkten“, d. h. denjenigen Stellen, an denen  $f(x) - \Pi_n(x; f)$  seine Extremwerte  $\pm E_n(f)$  annimmt, mindestens  $n + 2$  Stellen  $x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n+2,n}$  derart, daß diese Differenz in aufeinanderfolgenden Stellen verschiedene Zeichen besitzt; sie verschwindet also in mindestens  $n + 1$  Zwischenpunkten  $\xi_{i,n}$  ( $x_{i,n} < \xi_{i,n} < x_{i+1,n}$ ), und  $\Pi_n(x; f)$  ist das zu diesen Punkten gehörende Lagrangesche Interpolationspolynom (L.I.P.) von  $f(x)$ , mithin

$$(1) \quad f(x) - \Pi_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} (x - \xi_{i,n}). \quad (a \leq \xi \leq b)$$

Aus dieser Verbindung zieht Verf. Folgerungen. Gilt z. B. in  $(a, b)$  eine der Ungleichungen  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$  oder  $f^{(n+1)}(x) \geq m_{n+1} > 0$ , so gibt der Vergleich mit dem zu den Nullstellen des  $n + 1$ -ten Tschebyscheff-Polynoms gehörigen L.I.P. die Ungleichungen

$$E_n(f) \leq 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{bzw.} \quad E_n(f) \geq 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \cdot \frac{m_{n+1}}{(n+1)!},$$

aus denen ohne Rechnung

$$\Pi_n(x; x^{n+1}) = x^{n+1} - 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \cos \left[ (n+1) \arccos \frac{2x-a-b}{b-a} \right]$$

folgt. Aus (1) ergibt sich das Vergleichskriterium: Ist  $f^{(n+1)}(x) \geq \varphi^{(n+1)}(x) \geq 0$  in  $(a, b)$ , so gilt  $E_n(f) \leq E_n(\varphi)$ . Auch über die Verteilung der Deviationspunkte gewinnt man Aussagen. Es bezeichne  $x_{i,n}$  ( $i = 1 \dots n+2$ ),  $z_{j,n-1}$  ( $j = 1 \dots n+1$ ) die Folge der Deviationspunkte für  $f(x) - \Pi_n(x; f)$  bzw.  $\varphi(x) - \Pi_{n-1}(x; \varphi)$ ; ferner seien die vier Funktionen  $\varphi^{(n)}(x)$ ,  $f^{(n+1)}(x)$ , (2)  $\frac{f^{(n+1)}(x)}{E_n(f)} \mp \frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{E_{n-1}(\varphi)}$  in  $(a, b)$  zeichenfest, dann ist  $a = x_{1,n} = z_{1,n-1} < x_{2,n} < z_{2,n-1} < \dots < z_{n,n-1} < x_{n+1,n} < z_{n+1,n-1} = x_{n+2,n} = b$ . Das gleiche Ergebnis gilt, wenn statt dieser Voraussetzungen die folgenden gelten:  $\varphi^{(n)}(x)$ ,  $\varphi^{(n+1)}(x) \leq 0$  sind in  $(a, b)$  zeichenfest, von den beiden Funktionen (2) ist daselbst die erste  $\geq 0$ , die zweite  $\leq 0$ . Anwendung: Es bedeute

$$c_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n-i)\pi}{n}, \quad (i = 1 \dots n-1)$$

und  $f^{(n+1)}(x)$  sei in  $(a, b)$  zeichenfest, dann ist:  $a = x_{1,n} < x_{2,n} < c_1 < x_{3,n} < c_2 < \dots < c_{n-1} < x_{n+1,n} < x_{n+2,n} = b$ ; wechselt auch  $f^{(n)}(x)$  nicht Zeichen, so gilt folgende Schachtelung:  $a = x_{1,n} = x_{1,n-1} < x_{2,n} < x_{2,n-1} < x_{3,n} < x_{3,n-1} < \dots < x_{n+1,n-1} = x_{n+2,n} = b$ . Sind  $f^{(n+1)}(x)$ ,  $\varphi^{(n+1)}(x)$  in  $(a, b)$  zeichenfest, so gilt:  $E_n(f)/E_n(\varphi) = |f^{(n+1)}(\xi)/\varphi^{(n+1)}(\xi)|$  mit  $a \leq \xi \leq b$ . Schließlich gewinnt Verf. Abschätzungen für den Beiwert  $\pi_{n,n}$  von  $x^n$  in  $\Pi_n(x; f)$ , z. B.  $|\pi_{n,n}| \leq 2^{n-1}(E_{n-1} + E_n)$ . H. Geppert.

Merli, Luigi: Sulla contemporanea approssimazione di una funzione e della sua derivata con la formula di interpolazione di Lagrange. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 116—125 (1941).

$f(x)$  sei eine in  $|x| \leq 1$  erklärte stetige Funktion, deren zweite Ableitung daselbst

einer Lipschitzbedingung mit dem Exponenten  $\alpha > 0$  genügen möge. Benutzt man dann zur Bildung des  $n$ -ten Lagrangeschen Interpolationspolynoms  $L_n(x)$  die Nullstellen  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1 \dots n$ ) des  $n$ -ten Tschebyscheffpolynoms,  $x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ , so beweist Verf., daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} L'_n(x) = f'(x)$

gilt, also Funktion und Ableitung gleichzeitig überall angenähert werden. Setzt man

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x) \quad \text{und} \quad x = \cos \theta,$$

so ist demnach

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cos n\theta - \sin \frac{2k-1}{2n} \pi}{n \left( \cos \theta - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right)};$$

der Schwerpunkt des Beweises liegt in der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n |l_k^{(n)'}(x)| = O(n^2 \log n). \quad \text{Harald Geppert (Berlin).}$$

**Rémès, E. J.:** Sur les approximations par les moyennes d'ordre  $2k$  et celles d'après le principe des moindres carrés. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 437—448 u. franz. Zusammenfassung 448—450 (1941) [Russisch].

Soit  $E$  un ensemble de points donnés dans un espace abstrait, qui satisfait aux conditions:  $E$  appartient à une famille additive  $\{e\}$  d'ensembles de points de l'espace considéré, pour lesquels une mesure  $\mu(e)$  est définie et possède les propriétés  $\mu(e) \geq 0$ ,

$\mu\left(\sum_{v=1}^{\infty} e_v\right) = \sum_{v=1}^{\infty} \mu(e_v)$ , lorsque  $e_\alpha e_\beta = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\infty > \mu(E) > 0$ . Soit  $\{v_i(x)\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  un système donné de fonctions réelles mesurables ( $\mu$ ) qui sont bornées et linéairement indépendantes sur  $E$ . De plus on suppose que chaque

polynome  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i v_i(x)$  ne s'annule pas sur aucun sous-ensemble  $E_1 \subset E$  de

mesure  $\mu(E_1) > r$ ,  $r$  désignant un nombre non négatif fixe, inférieur à  $\mu(E)$ . Soit  $f(x)$  une fonction réelle mesurable ( $\mu$ ) telle que l'égalité  $f(x) = P_n(x)$  (quelques soient les valeurs des coefficients  $c_i$ ) n'a pas lieu sur un sous-ensemble quelconque  $E_1 \subset E$  de mesure  $\mu(E_1) > r' \geq 0$ ,  $r + r' < \mu(E)$ . Soit enfin  $\varrho(x)$  une fonction positive sur  $E$  telle que les intégrales  $\int_E \varrho(x) d\mu(e)$ ,  $\int_E \varrho(x) [f(x)]^{2k} d\mu(e)$  existent,  $k$  étant un nombre

entier. Désignons alors par  $p_{n0}(x) = \sum_{i=0}^n a_{i0} u_i(x)$  le polynome qui donne le minimum de l'intégrale  $\int_E \varrho(x) [f(x) - P_n(x)]^{2k} d\mu(e)$ . L'a. donne un procédé d'approximations

successives convergent pour déterminer le polynome  $p_{n0}(x)$ . Soit  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x)$

un polynome à coefficients réels et arbitraires. On lui fait correspondre d'une manière

univoque un autre polynome  $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i v_i(x)$ , réalisant le minimum de l'intégrale

$\int_E \varrho(P_n - f)^{2k-2} (Q_n - f)^2 d\mu$ . L'a. démontre alors qu'on peut trouver des nombres

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  tels que la suite des polynomes  $P_n, P_n + \alpha(Q_n - P_n) = P_{n1}, P_{n1} + \alpha_1(Q_{n1} - P_{n1}) = P_{n2}, \dots$  tend uniformément sur  $E$  vers le polynome  $p_{n0}(x)$ .

N. Obreschkoff (Sofia).

**Erdős, P.:** On a conjecture of Steinhaus. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 217—220 (1940).

Eine Steinhaußsche Vermutung behauptet: Sind alle Teilsummen der trigonometrischen Reihe  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  nicht negativ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , so gilt



$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ . S. Sidon [J. London Math. Soc. **13**, 181—183 (1938); dies.

Zbl. **19**, 162] hat bewiesen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [|a_k| + |b_k|] = 0$  ist. Unter Heranziehung

eines Sidonschen Hilfssatzes beweist Verf., daß für jedes  $n$  und für jede reelle Konstante  $c$  die Anzahl der Indizes  $k \leq n$ , für die  $a_k^2 + b_k^2 > c^2$  gilt, nicht größer als  $(\log_2 n)^{4/c^2+1}$  ist ( $\log_2 n$  bezeichnet den Logarithmus von  $n$  zur Basis 2). *L. Cesari*.

**Friedman, Bernard:** Fourier coefficients of bounded functions. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 84—92 (1941).

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste bringt nichts Neues. Er enthält den Beweis einiger beachtenswerter Ungleichungen, die schon von A. Ghizzetti (vom Verf. nicht zitiert) gefunden wurden und die die Euler-Fourierschen Koeffizienten einer beschränkten Funktion betreffen [Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 215—223 (1940); dies. Zbl. **24**, 30]. Der zweite Teil enthält eine elegante Ableitung des folgenden neuen Approximationssatzes: Ist  $f(x)$  eine summierbare, beschränkte periodische Funktion mit Periode  $2\pi$  und sind  $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$  ihre Euler-Fourierschen Koeffizienten, dann existiert für jedes  $N$  eine Treppenfunktion  $g_N(x)$ , die nur die Werte 0 und 1 annimmt, deren Euler-Fouriersche Koeffizienten  $a'_0, a'_n, b'_n, n = 1, 2, \dots$  die folgenden Gleichheiten aufweisen:

$$a'_n = a_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad b'_n = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

*L. Cesari* (Pisa).

**Foà, Alberto:** Aggiunta alla nota: „Sulla sommabilità assoluta  $(C, \alpha)$  delle serie di Fourier“. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 393—394 (1941).

In einer kürzlich erschienenen Arbeit (dies. Zbl. **23**, 220) hat Verf. in dem  $\alpha > \frac{1}{p}$  betreffenden Satz eine Bedingung nicht in Betracht gezogen, die immer dann erfüllt ist, wenn die Funktion  $\varphi(u) = \frac{1}{2}[f(t+u) + f(t-u)]$  in jedem Intervall  $(\varepsilon, \pi)$  absolut stetig ist.

*L. Cesari* (Pisa).

**Nikolski, S.:** Sur certaines méthodes d'approximation au moyen de sommes trigonométriques. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **4**, 509—517 u. franz. Zusammenfassung 517—520 (1940) [Russisch].

Soit  $f(x)$  une fonction continue de période  $2\pi$  et soit  $(1) \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  sa série de Fourier. Pour les moyennes  $\sigma(n, p) = \frac{1}{p+1} (S_{n-p} + S_{n-p+1} + \dots + S_n)$ ,  $0 \leq p \leq n$ ,  $S_n$  désignant les sommes partielles de la série (1), on a  $|\sigma(n, p)| \leq M_p^{(n)} \max |f(x)|$ ,

où  $M_p^{(n)} = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin \frac{1}{2}(2n+1-p)t \sin \frac{1}{2}(p+1)t|}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt$ . L'auteur démontre les résultats:

Pour  $0 \leq p \leq n$  on a  $\left| M_p^{(n)} - \frac{4}{\pi^2} \log \frac{n}{p+1} \right| \leq N$ ,  $N$  étant une constante indépendante de  $n$  et  $p$ . Si  $p = p(n)$  est une fonction de  $n$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0$ , alors on a

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_p^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin ru \sin u|}{u^2} du, r = \frac{2}{\alpha} - 1$ . Des résultats correspondants pour l'inter-

*N. Obreschkoff* (Sofia).

poleation trigonométrique sont aussi obtenus.

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Broggi, Ugo:** Su qualche espressione integrale dei polinomi di Laguerre. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 109—112 (1941).

Verf. setzt eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **21**, 124) fort und findet, ausgehend von der Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{iz} \left( \frac{z+it}{z} \right) \frac{dz}{z} = L_n(t),$$

in der  $L_n$  das  $n$ -te Laguerresche Polynom,  $C$  eine reguläre geschlossene, den Nullpunkt umschließende Kurve bedeuten, die folgende Abschätzung von Szegö  $|L_n(t)| < e^{\frac{t}{2}}$  für  $t > 0$ . Ferner beweist Verf., daß unter der Voraussetzung  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)$  in jedem endlichen Gebiet der komplexen Ebene gleichmäßig konvergiert und daselbst eine ganze Funktion vom Exponentialtyp darstellt. *Giovanni Sansone.*

**Broggi, Ugo:** Su di una classe di sviluppi in serie di polinomi di Laguerre. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3.** 195—198 (1941).

Es sei  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ ,  $z = 1$  sei ein regulärer Punkt der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ; für  $\alpha < 1$  werde gesetzt

$$\alpha^n b_n = a_n + \binom{n+1}{1} a_{n+1} \frac{\alpha-1}{\alpha} + \binom{n+2}{2} a_{n+2} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 + \dots;$$

dann beweist Verf., daß die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(\alpha t)$ , in der  $L_n$  das  $n$ -te Laguerresche Polynom bedeutet, gegen eine ganze Funktion  $\varphi(t)$  vom Exponentialtyp konvergiert und die Formel gilt

$$\varphi_n(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t), \quad \text{d. h.} \quad a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} L_n(t) \varphi(t) dt, \quad (n=0, 1, \dots).$$

*Giovanni Sansone (Firenze).*

**Cowling, T. G.:** On certain expansions involving products of Legendre functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. **11**, 222—224 (1940).

Verf. erwähnt, daß er bei der Bestimmung homogener Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

zu den Beziehungen

$$(\mu^2 + \mu_1^2 - 1)^{n/2} P_n^m \left\{ \frac{\mu \mu_1}{(\mu^2 + \mu_1^2 - 1)^{1/2}} \right\} = \frac{(n+m)!}{n!} \sum_{r=0}^n a_{nr} \frac{(r-m)!}{(r+m)!} P_r^m(\mu) P_r^m(\mu_1);$$

$$(\mu^2 + \mu_1^2 - 1)^{(n+1)/2} P_n^m \left\{ \frac{\mu \mu_1}{(\mu^2 + \mu_1^2 - 1)^{1/2}} \right\} = \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!} \sum_{r=n}^{\infty} b_{nr} \frac{(r-m)!}{(r+m)!} P_r^m(\mu) Q_r^m(\mu_1)$$

geführt wurde. Hierbei sind  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen  $0 \leq m \leq n$ ,  $a_{nr}$  ist der Koeffizient von  $P_r(z)$  in der Entwicklung von  $z^n$  nach Legendreschen Polynomen und  $b_{nr}$  der Koeffizient von  $Q_r(z)$  in der Entwicklung von  $z^{-n-1}$  nach Legendreschen Funktionen zweiter Art. Beim Beweis obiger Formeln geht Verf. vom Laplaceschen Integralausdruck für  $P_n^m$  aus und verwendet weiterhin das Additionstheorem für diese Funktionen. In analoger Weise verfährt er beim Beweis der zweiten obigen Formel.

*M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Kharadze, A.:** Über eine Anwendung von Polynomen, die den Jacobischen analog sind. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 15—19 u. dtsh. Zusammenfassung 20—21 (1941) [Russisch].

Soit  $\alpha$  une racine primitive de l'équation  $z^k = 1$ . L'auteur introduit l'opération  $I^{(k)} f(z) dz = F(1) + \alpha^{k-1} F(\alpha) + \dots + \alpha F(\alpha^{k-1})$ , où  $f(z)$  est un polynôme et  $F(z)$  est une fonction primitive de  $f(z)$ . Il démontre qu'il existe des polynômes  $Q_n^{(k)}(z)$  réels de degré  $n = km$  et  $n = km + 1$ , qui satisfont à la relation  $I^{(k)}(1 - z^k) Q_n^{(k)}(z) \varphi(z) dz = 0$  pour chaque polynôme  $\varphi(z)$  de degré  $\leq n - 1$  et il obtient le théorème: Désignons par  $E$  l'ensemble des segments  $0\alpha^s$ ,  $s = 0, 1, \dots, k - 1$ , dans le plan de la variable complexe  $z$  et soit donné un polynôme réel arbitraire  $f(z) \equiv F^{(k+1)}(z)$  qui prend sur  $E$  seulement des valeurs réels et sur les points  $\alpha^s$ ,  $s = 0, 1, \dots, k - 1$  satisfait à la condition  $I^{(k)}(1 - z^k) F^{(k+1)}(z) dz = 0$ . Alors  $F^{(k+1)}(z)$  s'annule sur une étoile  $E'$  qui fait partie de  $E$  et dont les points limites sont les zéros de module maximum du



polynome  $Q_n^{(k)}(z)$ . Des applications relatives au nombre  $\zeta$  dans la formule de quadrature de Newton sont aussi données.

*N. Obreschkoff (Sofia).*

**Rutgers, J. G.:** Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de Bessel. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 636—647 (1941).

Aus der früheren Formel des Verf. (Teil I, dies. Zbl. 25, 42) und einer Formel von Nielsen wird die Beziehung gewonnen:

$$2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho+n+1)}{n!} J_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x J_{\nu}(\alpha) \cdot (x-\alpha)^{\varrho} d\alpha, \quad \begin{cases} \Re(\nu) > -1 \\ \Re(\varrho) > -1, \end{cases}$$

aus der durch Spezialisieren ( $\nu = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \varrho = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  u. ä.) eine Anzahl neuer Formeln sich ergeben, wie z. B.:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} J_{2n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha(x-\alpha)}}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{4n-1}{2n} J_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) &= (\varrho+1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x J_{\varrho+1}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{x-\alpha}}, & \Re(\varrho) > -1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{4n-1}{2n} J_{2n}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin \alpha d\alpha}{\alpha \sqrt{\alpha(x-\alpha)}}. \end{aligned}$$

Unter Heranziehung einer weiteren Formel von Nielsen erhält Verf. die Gleichung:

$$2^{\varrho-\mu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho+n+1)}{\Gamma(\mu+n+1)} \binom{\mu-\varrho-1}{n} J_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x J_{\nu}(x-\alpha) J_{\mu}(\alpha) \alpha^{\varrho-\mu} d\alpha, \quad \begin{cases} \Re(\nu) > -1 \\ \Re(\varrho) > -1, \end{cases}$$

die zu Formeln der Art führt:

$$\begin{aligned} &\int_0^x J_{\varrho+m+1}(\alpha) \sin \alpha \frac{d\alpha}{\alpha^{m+1} \sqrt{x-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{(\varrho+m+n+1)(\varrho+m+n) \dots (\varrho+n+1)} (\sin x J_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) \\ &\quad - \cos x J_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x)), \quad \begin{cases} \Re(\varrho) > -1 \\ m \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Gamma(\varrho+1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho+2n+1}{2n} J_{\nu+\varrho+2n+1}(x) = \int_0^x J_{\nu}(x-\alpha) \cos \alpha \cdot \alpha^{\varrho} d\alpha, \quad \begin{cases} \Re(\nu) > -1 \\ \Re(\varrho) > -1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\varrho+1) 2^{\varrho+1}}{2\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho+2n+1}{2n+1} \\ &\quad \cdot [(2n+1) \cos x J_{\nu+\varrho+2n+1}(x) + (2\varrho+2n+2) \sin x J_{\nu+\varrho+2n+2}(x)] \\ &= \int_0^x J_{\nu}(\alpha) \cos \alpha \cdot (x-\alpha)^{\varrho} d\alpha, \quad \begin{cases} \Re(\nu) > -1 \\ \Re(\varrho) > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

*Volk (Würzburg).*

**Rutgers, J. G.:** Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de Bessel. 3. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 744—753 (1941).

Aus den früheren Formeln (siehe dies. Zbl. 25, 42 und vorsteh. Referat) werden durch Spezialisieren der Parameter sowie zweckmäßige Kombination und Umformung

weitere gewonnen, wie z. B.

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(\varrho + 1) 2^{\varrho+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2\varrho+2n+1}{2n} J_{\varrho+2n+\frac{1}{2}}(x) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(x-\alpha) \cos \alpha \cdot \frac{\alpha^{\varrho} d\alpha}{\sqrt{x-\alpha}}, \quad \Re(\varrho) > -1, \\
 & 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) J_{\nu+2n+1}(x) = \int_0^x J_{\nu}(x-\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad \Re(\nu) > -1, \\
 & 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+1}(x) = \frac{x}{\nu} J_{\nu}(x) - \frac{1}{\nu} \int_0^x J_{\nu}(x-\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad \Re(\nu) > -1, \\
 & \int_0^x J_{2m+1}(\alpha) \sin \alpha d\alpha = x [\sin x J_{2m+1}(x) - \cos x J_{2m+2}(x)] + (-1)^m (2m+1) \left\{ \sin x J_0(x) - \right. \\
 & \quad \left. - 2 \sum_{n=0}^m (-1)^n [\sin x J_{2n}(x) - \cos x J_{2n+1}(x)] \right\}, \quad m \geq 0, \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) J_{2n+1}(x) = \frac{x}{2} [J_0(x) + \cos x]. \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(2n+2) [\sin x J_{2n+1}(x) - \cos x J_{2n+2}(x)] \\
 & \quad = \frac{x}{2} [\sin x J_0(x) + \cos x J_1(x)]. \quad \text{Volk (Würzburg).}
 \end{aligned}$$

**Meijer, C. S.:** Neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. 5. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 590—598 (1941).

Durch besondere Wahl der Parameter, der Indizes sowie durch eine Substitution neuer unabhängiger Veränderlicher in den allgemeinen Integraldarstellungen für die in den früheren Mitteilungen des Verf. (dies. Zbl. 24, 311, 312, 398) behandelten Funktionen  $G$  erhält Verf. weitere Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen, in denen als Integrand Produkte Whittakerscher Funktionen verschiedener Arten, Besselscher Funktionen, Exponentialfunktionen und Potenzen auftreten. Verf. zeigt, wie diese Integraldarstellungen in besonderen Fällen auf Integraldarstellungen für Webersche Funktionen führen. Durch Einführung weiterer neuerer Werte der Parameter, Indizes sowie durch neue Substitutionen der unabhängigen Veränderlichen ergeben sich aus den allgemeinen Integraldarstellungen für die Funktionen  $G$  noch weitere Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen, bei denen als Integrand Produkte zweier Whittakerscher Funktionen auftreten. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Meijer, C. S.:** Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen und ihre Produkte. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 599—605 (1941).

Zu Teil I siehe dies. Zbl. 24, 398. — Verf. geht von folgender Integraldarstellung einer Whittakerschen Funktion aus:

$$W_{k,m}(z) = 2z^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{2} \sin^2 t} W_{k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\lambda}(z \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 t) P_{m-\frac{1}{2}}^1(\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 t) \mathfrak{S} \mathfrak{in}^{2\lambda} t \cdot dt.$$

Indem als Sonderfall einer Whittakerschen Funktion eine Webersche Funktion eingeführt wird, erhält er aus dieser Formel unmittelbar eine Darstellung für eine Whittakersche Funktion, deren Integrand eine Webersche Funktion enthält. Diese Integraldarstellung wird vom Verf. noch erweitert. Durch eine andere, besondere Wahl der Parameter sowie der unabhängigen Veränderlichen in obiger Integraldarstellung entsteht eine Integraldarstellung für Whittakersche Funktionen, deren Integrand abgeleitete Legendresche Funktionen enthält. In analoger Weise führt Verf. weitere neue Substitutionen in seinen früheren allgemeinen Formeln durch und erhält neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. Insbesondere ergeben sich auch solche Integraldarstellungen für Produkte zweier Whittakerscher Funktionen. *M. J. O. Strutt*.



**Burehnall, J. L., and T. W. Chaundy:** Expansions of Appell's double hypergeometric functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 249—270 (1940).

Verff. gehen von den Ausdrücken für die vier Appellschen hypergeometrischen Funktionen zweier Veränderlicher in Form von doppelten unendlichen Potenzreihen aus. Mit Hilfe symbolischer Differentialquotienten drücken sie diese vier Funktionen in Produkten einfacher hypergeometrischer Funktionen sowie in anderen Appellschen hypergeometrischen Funktionen zweier Veränderlicher aus. Mit Hilfe der Theoreme von Gauss, Vandermonde, Dougall-Bailey und Saalschütz erhalten sie Ausdrücke für eine der Appellschen hypergeometrischen Funktionen zweier Veränderlicher in Form einer unendlichen Reihe, wobei jedes Glied ein Produkt zweier einfacher hypergeometrischer Funktionen je einer der Veränderlichen enthält. Die Ausarbeitung dieses Verfahrens für die vier genannten Appellschen Funktionen führt insgesamt auf 18 neue Reihenausdrücke für diese Funktionen, wobei jedes Glied wieder eine Appellsche hypergeometrische Funktion zweier Veränderlicher enthält. Daraufhin leiten Verff. 12 weitere Reihenentwicklungen für einfache und für Appellsche hypergeometrische Funktionen ab, wobei zum Teil die Veränderlichen Summen und Produkte der ursprünglichen Veränderlichen sind. Ausgehend von der bekannten bestimmten Integralformel für eine hypergeometrische Funktion erhalten Verff. für die vierte Appellsche hypergeometrische Funktion einen neuen Integralausdruck. Zum Schluß stellen sie für die behandelten vier hypergeometrischen Funktionen eine Anzahl von Ungleichheiten und Grenzwerten zusammen. Verff. erwähnen noch, daß es ihnen nicht gelungen ist, diese Ergebnisse auf analoge hypergeometrische Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen auszudehnen, aber daß es nicht schwer ist, mit Hilfe der verwendeten Hilfsmittel ähnliche Ergebnisse zu erhalten für hypergeometrische Funktionen mit zwei Veränderlichen, aber mehreren Parametern. *M. J. O. Strutt.*

## **Funktionentheorie:**

**Belinfante, M. J.:** Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. 1. Mitt.: Die Cauchyschen Integralsätze und die Taylorsche Reihe. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 173—185 (1941).

Verf. bringt die ausführliche Herleitung der Resultate, die er bereits in einer früheren Note [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1395—1397 (1931); dies. Zbl. 4, 64] angekündigt hatte. — Es soll eine kurze Übersicht gegeben werden: Eine komplexe Funktion  $f(z)$  in einer beschränkten Punktmenge  $G$  wird regulär genannt, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $d(\varepsilon) > 0$  gibt, so daß

$$\left| \frac{F(z_3) - F(z_1)}{z_3 - z_1} - \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} \right| < \varepsilon$$

ist für irgend 3 Punkte  $z_1, z_2, z_3$  aus  $G$ , für die  $0 < |z_1 - z_i| < d$  ( $i = 2, 3$ ) ist. Die Funktionenklasse wird dadurch eindeutig bestimmt, daß  $F'(z)$  existiert und gleichmäßig stetig ist, falls  $G$  als Gebiet angenommen wird. Dies wird dann dauernd vorausgesetzt. Nach Einführung des komplexen Integrals wird nun der Cauchysche Integralsatz hergeleitet. Dabei dient der klassische Beweis [vgl. z. B. Knopp, Funktionentheorie I (1926)] als Vorbild. Dann folgen die Sätze über  $F(z) = \int_{L_z} f(z) dz$ , wo  $L_z$

ein Weg von  $z_0$  nach  $z$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  ist. Es wird jedem geschlossenen Weg  $L$  um einen Punkt  $Z$  von  $G$  eine Umlaufszahl  $h \geq 0$  mit

Hilfe des Satzes, daß stets  $\int_L \frac{dz}{z - Z} = 2h\pi i$  ist, zugeordnet. Dann kann die Cauchysche Integralformel ausgesprochen und hergeleitet werden für jedes  $L$ , für das  $h = 1$  ist. Daraus folgen dann die üblichen Sätze, u. a. die Reihensätze, wobei die Konvergenz im positiven Sinn verwendet wird. *E. Hlawka (Wien).*

**Belinfante, M. J.: Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. 2. Mitt.: Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung. 1.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 276—285 (1941).

Verf. bringt intuitionistische Beweise für die klassischen Sätze, die sich um das logarithmische Residuum gruppieren. Natürlich müssen die meisten Sätze in engerer Form ausgesprochen werden. So lautet z. B. der Satz vom Prinzip des Maximums in der Form des Verf. (Satz IIIA): Es sei  $f(z)$  regulär und variabel in  $|z| < R$ . Zu zwei beliebigen Zahlen  $d$  und  $\varepsilon$ , wo nur  $0 < d < R$ ,  $\varepsilon > 0$  ist, läßt sich stets ein  $k$  ( $0 < k < \varepsilon$ ) so bestimmen, daß folgendes gilt: Jedem  $z_0$  mit  $|z_0| < R - d$  läßt sich ein  $z_1$  mit  $|z_1| < R - \frac{1}{2}d$  so zuordnen, daß  $|f(z_1)| > |f(z_0)| + k$  ist. Es treten auch neue Sätze auf, z. B. Satz IV:  $f(z)$  besitze die obigen Eigenschaften. Dann kann man zu jedem  $z_0$  mit  $|z_0| < R$  zwei positive Zahlen  $r_1$  und  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) so bestimmen, daß  $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz \geq 1$  wird, das Integral erstreckt über ein einfaches, geschlossenes Polygon, das  $|z - z_0| = r_1$  im positiven Sinn umschließt und in  $|z - z_0| \leq r_2$  liegt. Satz IV ist dann trivial, wenn man die genaue Lage und Multiplizität der Nullstellen von  $f(z) - f(z_0)$  kennt. — Die Beweise sind gut verständlich. *E. Hlawka* (Wien).

**Belinfante, M. J.: Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. 3. Mitt. Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung. 2.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 420—425 (1941).

In der 3. Mitt. wird nun der Hauptsatz bewiesen: Ist  $f(z)$  regulär in  $|z| < R$ ,  $G$  ein in  $|z| < R$  liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet, auf dessen Rande  $f(z) \neq 0$ , und ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m > 0,$$

so gibt es in  $G$   $m$  Punkte  $w_1, \dots, w_m$ , so daß  $f(w_i) = 0$  ist,  $\lim_{z \rightarrow w_i} \frac{f(z)}{\prod_{h=1}^m (z - w_h)}$  existiert

und  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{\prod_{h=1}^m (z - w_h)}$  in  $G$  regulär und  $\neq 0$  ist. Es ist dies eine intuitionistische

Fassung des Satzes vom logarithmischen Residuum. Beim Beweis werden die Sätze der 2. Mitt. verwendet (siehe vorstehendes Referat). Den Sätzen der 2. und 3. Mitt. lassen sich noch Nebensätze anreihen, wenn man die Voraussetzung: „ $f(z)$  regulär in  $|z| < R$ “ abändert in „ $f(z)$  eindeutig regulär in  $R_1 \leq |z| \leq R_2$ “. Der Wortlaut der Sätze ist dann entsprechend abzuändern. *E. Hlawka* (Wien).

**Belinfante, M. J.: Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. 4. Mitt.: Der Weierstrassche Unbestimmtheitsatz.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 563—567 (1941).

Verf. beweist zuerst mit Hilfe des Hauptsatzes der 3. Mitteilung in üblicher Weise den Fundamentalsatz der Algebra. Er wird nun noch ergänzt durch folgenden Satz: Ist in  $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$   $a_k \neq 0$ , so hat  $f(z)$  wenigstens  $n - k$  Nullstellen. Dieser Satz wird dann im Beweis des Satzes von Weierstraß verwendet. In intuitionistischer Fassung lautet er: Ist  $f(z)$  regulär in  $0 < |z - z_0| < R$ , dabei  $z_0$  wesentlich singulär, und sind  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  ( $r < R$ ) beliebig vorgegeben, ebenso eine komplexe Zahl  $w$ , so gibt es ein  $z_1$  mit  $0 < |z_0 - z_1| < r$ , so daß  $|f(z_1) - w| < \varepsilon$  gilt. Dabei ist eine wesentlich singuläre Stelle  $z_0$  von  $f(z)$  so definiert: In der Laurentschen Entwicklung

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n},$$

gültig für  $0 < |z - z_0| < R$ , soll es für jedes  $A > 0$  ein  $b_m \neq 0$  geben mit  $m > A$ . — Dieser Satz läßt sich umkehren: Ist  $f(z)$  regulär in  $0 < |z - z_0| < R$  und gibt es ein  $r$  ( $0 < r < R$ ), ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $w$ , so daß für  $0 < |z - z_0| < r$ ,  $|f(z) - w| > \varepsilon$  ist, so ist  $z_0$  regulärer Punkt oder ein Pol von bestimmter Ordnung, d. h. es gibt ein  $m \geq 0$ , so daß  $b_m \neq 0$ , aber  $b_{m+1} = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) ist. Die Aussage „von be-



stimmter Ordnung“ ist wesentlich, denn  $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z^2}$  wo  $\alpha$  weder 0 noch  $\neq 0$  ist, hat keine bestimmte Ordnung. E. Hlawka (Wien).

**Belinfante, M. J.:** Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. 5. Mitt.: Die intuitionistische Übertragung des Picardschen Satzes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 711—717 (1941).

Mit der 5. Mitteilung schließt der Verf. diese Untersuchungsreihe ab. Sie gipfelt in dem Beweis des Picardschen Satzes. Der Beweis wird analog dem Blochschen Beweis geführt. Vorbild war die Landausche Darstellung. Natürlich sind beim Beweis und bei der Fassung der Sätze Abänderungen notwendig. Ich greife nur den kleinen Picardschen Satz heraus: Seien  $F(z)$  ganz und nicht konstant,  $a$  und  $b \neq a$  vorgegeben. Dann nimmt  $F(z)$  wenigstens einen der Werte  $a$  und  $b$  an. Daraus kann man nicht schließen:  $F(z)$  läßt keinen oder nur einen Wert aus. Gegenbeispiel:  $e^z(1 + \alpha e^z)$ , wo weder  $\alpha = 0$  noch  $\alpha \neq 0$  bekannt ist. E. Hlawka (Wien).

**Weisner, Louis:** Power series the roots of whose partial sums lie in a sector. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 160—163 (1941).

Im Anschluß an ein Resultat von G. Pólya [Über die Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln; Rend. Circ. mat. Palermo 36, 279—295 (1913)] beweist Verf.: Wenn die Wurzeln aller Teilsummen der Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  von einem gewissen Grade an in einem Winkelraum mit dem Scheitel in  $O$  und der Öffnung  $\alpha < \pi$  liegen, so stellt  $f(z)$  eine ganze Funktion von der Ordnung 0 dar. Der Beweis stützt sich auf folgenden Hilfssatz: Liegen die Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_n (\neq 0)$  in einem solchen Winkelraum, so gilt

$$\left| \frac{n \cos \alpha/2}{\sum_{k=1}^n z_k^{-1}} \right| \leq |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sec \alpha/2 \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|.$$

Pfluger.

**Rios, Sixto:** Über ungeordnete Potenzreihen und die Überkonvergenz einer Klasse Dirichletscher Reihen. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 2, 1—7 (1940) [Spanisch].

Verf. skizziert eine vollständige Kennzeichnung der Dirichletreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen innerhalb jener Klasse von Dirichletreihen, welche durch die Forderung umschrieben ist, es gebe  $\beta, \gamma$  so, daß die Exponenten sich um den Modul  $\gamma + \beta n$  gruppieren und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\gamma + \beta n - \lambda_{n_s}| = -\infty$$

wird. Wenn dann Konvergenz- und Regularitätsgerade nicht zusammenfallen, herrscht im Streifen dazwischen Überkonvergenz; eine überkonvergente Abschnittsfolge entsteht durch Zusammenfassen der Glieder mit Exponenten nahe um  $\gamma + \beta n$ ; die Summe einer überkonvergenten Dirichletreihe  $f(s)$  ist wieder zerlegbar in  $g(s) + h(s)$ , wo  $g(s)$  kleinere Regularitätsabszisse als  $f(s)$ ,  $h(s)$  aber Lücken mit nach unten beschränkter Relativlänge zeigt. Die betrachtete Reihenklasse enthält Exponentenfolgen von unendlicher Maximaldichte, ohne aber alle Exponentenfolgen endlicher Maximaldichte einzuschließen. — Vorbereitend werden Potenzreihen mit ungeordneten Exponenten  $\lambda_n$  betrachtet und in ihrer Stellung zwischen Taylor- und Dirichletreihen auch in bezug auf Überkonvergenz erörtert. Beweise nur angedeutet. Ullrich (Gießen).

**Rios, Sixto:** Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 677—683 (1941).

Verf. zeigt zunächst an einem Beispiel, daß man durch Umordnen der Glieder einer Dirichletschen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} (1)$  mit einer endlichen Grenzabszisse absoluter Konvergenz eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda'_n s} (2)$  erhalten kann, welche in einem umfassenderen Bereiche als die ursprüngliche Reihe konvergiert. Da beide Reihen den Bereich der

absoluten Konvergenz gemeinsam haben, stellen sie dieselbe Funktion dar. (2) liefert mithin die analytische Fortsetzung von (1). — Die Koeffizienten  $\{\lambda'_n\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) in (2) bilden zwar keine monoton wachsende Folge mehr, doch haben sie wie die entsprechenden Koeffizienten  $\{\lambda_n\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), in (1) noch den Wert  $\infty$  als einzigen Häufungspunkt. Wenn außerdem  $\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda'_n s} - e^{-\lambda'_{n+1} s}]$  in der Halbebene  $\Re\{s\} > 0$

absolut konvergiert, spricht Verf. für die Reihen (2) folgende Sätze aus: Konvergiert eine solche Reihe im Punkte  $s_0$ , so ist sie auch für  $\Re\{s\} > \Re\{s_0\}$  konvergent. Ist ferner die Konvergenzabszisse  $C > 0$ , so gilt  $C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log \left| \sum_{m=1}^n a_m \right| / \lambda_n$ . — Schließlich gibt Verf.

eine konvergente Reihe von Polynomen an, welche keinen Bereich absoluter Konvergenz besitzt und beweist, daß durch passende Umordnung der Glieder eine Reihe erhalten werden kann, welche zur Summe jede beliebige vorgegebene analytische Funktion hat. Lammell (Prag).

**Bochner, S.: Hadamard's theorem for Dirichlet series.** Ann. of Math., II. s. 41, 711—714 (1940).

Versteht man unter  $D(\varphi)$  für beliebiges  $\varphi(t)$  das durch  $\varphi(t) < \sigma < \infty$  ( $-\infty < t < \infty$ ) bestimmte Gebiet der  $s = \sigma + it$ -Ebene, so lautet die genaue Übertragung des Hadamardschen Multiplikationssatzes für Potenzreihen auf Dirichletsche Reihen: Sind

$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ ,  $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$  ( $\lambda_n \geq 0$ ) in  $D(\varphi)$  bzw.  $D(\psi)$  analytisch, so existiert  $H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{-\lambda_n s}$  und ist in  $D(\chi)$  mit  $\chi(t) = \limsup_{\tau} \{\varphi(\tau) + \psi(t - \tau)\}$

analytisch. Wie bekannt ist, gilt die Aussage in dieser Form nicht allgemein; eine entsprechende Modifikation hat S. Mandelbrojt angegeben (vgl. V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, VIII. Kapitel, Paris 1933; dies. Zbl. 8, 115). Die vorliegende Note enthält eine neue Fassung des Hadamardschen Satzes für Dirichletsche Reihen, die zwar nicht so umfassend ist wie die Mandelbrojtsche, ihr gegenüber aber den Vorteil hat, daß sie beliebige fastperiodische Funktionen in Betracht zieht, nicht nur solche, deren Dirichlet-Exponenten  $\lambda_n$  eine monotone Folge bilden, und daß sie überdies in der Form der eingangs formulierten Aussage sehr nahe kommt. Nennt man für beliebiges (im ursprünglichen Bohrschen Sinne) fastperiodisches  $\varphi(t)$  die Funktion  $F(s)$  zur Klasse  $C_{\varphi}$  gehörig, wenn  $F(s)$  in  $D(\varphi)$  analytisch und beschränkt, überdies für irgendein konstantes  $\alpha$  in der Halbebene  $D(\alpha)$  fastperiodisch ist, so lautet das Ergebnis der vorliegenden Note: Gehört  $F(s)$  zu  $C_{\varphi}$  und  $G(s)$  zu  $C_{\psi}$ , so existiert  $H(s)$  und gehört für beliebiges konstantes  $\delta > 0$  zu  $C_{\chi + \delta}$ . F. Lösch (Rostock).

**Lanzewizky, I. L.: Über die Orthogonalität der Fejér-Szegö'schen Polynome.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 199—200 (1941).

Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$  une fonction holomorphe dans le cercle  $|z| < 1$  et posons  $|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) r^n$ ,  $r < 1$ . L'auteur énonce le résultat: la condition nécessaire et suffisante pour que le système des polynomes  $P_n(x)$  soit orthogonal est que les coefficients  $\alpha_n$  satisfont aux relations (1)  $C_{n+1} = \frac{C_1 C_n - C_2 C_{n-1}}{C_1 + C_n - C_2 - C_{n-1}}$ ,  $n = 3, 4, 5, \dots$  où  $C_n = \alpha_n / \alpha_{n-1}$ . Il donne aussi la résolution de (1) et étudie le cas où les  $\alpha_n$  sont réels, en donnant quelques indications sur la marche de démonstration. N. Obreschkoff.

**Pólya, G.: Sur l'existence de fonctions entières satisfaisant à certaines conditions linéaires.** Trans. Amer. Math. Soc. 50, 129—139 (1941).

L'auteur démontre ce théorème d'existence: On donne un entier  $p$ ;  $q$  points distincts  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  et la suite  $a_0, a_1, a_2, \dots$  dont chaque terme est l'un des  $c_j$  et telle que  $a_{n+p} = a_n$ ,  $n \geq 0$ ; une suite d'entiers non décroissants  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  tels que



$\alpha_{n+p} = \alpha_n + p$ ,  $n \geq 0$  et  $\alpha_j > \alpha_k$  si  $j > k$  et  $a_j = a_k$ ; on suppose  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  et  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  tels qu'il n'existe pas de polynôme non identiquement nul et de degré inférieur à  $p$  qui satisfasse aux équations  $P^{(\alpha_j)}(a_j) = 0$ ,  $j = 0, \dots, p-1$ ; on se donne enfin une suite infinie de nombres  $A_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n / \alpha_n!)^{1/\alpha_n} = 0$ ; dans ces conditions il existe une fonction entière  $F(z)$  qui vérifie les égalités  $F^{(\alpha_n)}(a_n) = A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Des questions voisines avaient été traitées par Poritsky [Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 274—331 (1923)] et Gontcharoff [Commun. Soc. Math. Kharkov, IV. s. **5**, 67—85 (1932)]; deux cas particuliers avaient été traités par J. M. Whittaker (voir ce Zbl. **8**, 169 et **12**, 155). La démonstration résulte d'une analyse serrée des conditions du problème et introduit d'intéressantes fonctions auxiliaires qui peuvent jouer un rôle important dans l'étude des problèmes de convergence des séries qui définissent les fonctions  $F(z)$  lorsqu'on essaie de généraliser dans ce cas la formule d'interpolation de Lagrange. L'auteur montre aussi sur des exemples que des problèmes d'existence voisins de celui traité n'ont pas de solution. *G. Valiron* (Paris).

**Ketchum, P. W.:** On the possible rate of growth on an analytic function. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 211—228 (1941).

Das Hauptergebnis (Theorem IV) sichert Vorhandensein und Herstellung einer analytischen Funktion  $f(z)$ , welche in einem beliebigen, schlichten Gebiet  $\mathfrak{G}$  mit dem Rand  $\Gamma$  eine dort reell  $\geq 0$ , sonst aber beliebig vorgegebene Funktion  $G(z)$  dem Betrage nach übertrifft

$$|f(z)| \geq G(z),$$

abgesehen von gewissen unvermeidlichen Ausnahmefällen  $\mathfrak{A}$ ; dabei besteht  $\Gamma$  aus allen Punkten, in deren Nähe  $G(z)$  unbeschränkt ist. Die Struktur der Ausnahmefälle  $\mathfrak{A}$  ist derart, daß sie als Folgen von Ringen  $\mathfrak{R}$ , erscheinen (Ring = bel. zweifach zush. Gebiet), welche sich gegen den Rand  $\Gamma$  in näher bezeichneter Weise häufen; jeder Teilbereich  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$  wird von jedem Teilkontinuum von  $\Gamma$  durch eine geschachtelte Teilfolge aller  $\mathfrak{R}$ , getrennt. Vorbereitend ist eine punktmengentheoretische Sichtung dieser Verhältnisse gegeben (Teil I). — Die methodische Grundlage des Theorems IV ruht in dem Näherungssatz von Hilbert (Ges. Abh. **3**, 3—9), in Erweiterung von Walsh, Russell [Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 13—28 (1934), bes. S. 17; dies. Zbl. **8**, 214] und Verf.: Danach kann jeder Satz von  $n$  fremden geschlossenen Jordankurven mit jeder geforderten Genauigkeit zugleich durch die Schichtlinien einer rationalen Funktion approximiert werden. Der hierfür erforderliche Spielraum führt auf die genannten Ausnahmefälle. — Die Aufgabe ist einer Approximation von  $f(z)$  an eine geg. analytische Funktion  $g(z)$  gleichwertig, indem  $\left| \frac{1}{f(z) - g(z)} \right| \geq G(z)$  verlangt wird.

Hier sind die Untersuchungen von Frl. Roth und von Keldych und Lavrentieff dem Gegenstande nahe (dies. Zbl. **20**, 235; **21**, 335); doch wird dort eine kreissymmetrische Näherungsforderung  $G(|z|)$  erhoben, was ganz andere Bedingungen schafft. — Verf. zeigt denn auch, daß in seinem Falle, bei freier Vorschrift von  $G(z)$ , die Ausnahmefälle nicht umgangen werden können; das ist durch einfache Schätzung an der Poisson-Jensenschen Formel zu belegen. — Als Anwendung behandelt Verf. die von ihm schon mehrfach untersuchte simultane Darstellung von  $n$  analytischen Funktionen  $f_\nu(z)$  (die nicht ineinander fortsetzbar zu sein brauchen) durch eine einzige Reihenentwicklung (siehe z. B. dies. Zbl. **17**, 217). Verf. strebt jetzt den Fall  $n \rightarrow \infty$  an. In der Tat kann er zeigen: Hat man ein festes  $\lambda > 0$  und drei Folgen von Punkten  $a_\nu$ , Zahlen  $\theta_\nu > 0$ , und Funktionen  $f_\nu(z)$  derart, daß alle  $f_\nu(z)$  auf den (fremden) Kreisen  $|z - a_\nu| \leq \lambda \theta_\nu$  gleichmäßig beschränkt sind, dann gibt es eine von  $a_\nu, \theta_\nu$  abhängige (aber von  $f_\nu(z)$  unabhängige) Folge von Funktionen  $\Phi_\nu(z)$ , die regulär analytisch sind in einem Gebiet, das alle  $a_\nu$  einschließt, und welche mit passenden Konstanten  $c_\nu$  die simultane Darstellung  $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \Phi_\nu(z)$  gestatten; in je einer Umgebung von  $a_\nu$  herrscht gleichmäßige Konvergenz, und es ist dort  $f(z) \equiv f_\nu(z)$ .

*Ullrich* (Gießen).

**Selberg, Atle: Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen. 2.** Arch. Math. og Naturvid., B 44, Nr 16, 1—11 (1941).

Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion, die für alle positiven und negativen rationalen ganzen Zahlen ganzzahlige Werte annimmt,  $|f(z)| \leq M(r)$  für  $|z| = r$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log M(r) \leq \alpha$ . Nach Pólya und Carlson folgt aus  $\alpha \leq \log \beta$ , daß identisch  $f(z) = \beta^2 P(z) + \gamma^2 Q(z) + R(z)$  gilt, wobei  $\beta = (3 + \sqrt{5})/2$ ,  $\gamma = (3 - \sqrt{5})/2$  und  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $R(z)$  Polynome bedeuten. Verf. beweist diesen Satz unter der schwächeren Voraussetzung:  $\alpha \leq \log \beta + 2 \cdot 10^{-6}$ . Es genügt, den Satz für gerade Funktionen  $g(z)$  zu beweisen. Die Methode ist derjenigen der gleichnamigen Arbeit 1 des Verf. (dies. Zbl. 24, 329) analog. Wie dort werden Differenzenfolgen  $a_n = \Delta^{2n} g(n)$ ,  $b_n = \Delta^m a_n$  betrachtet, wo  $\Delta^1 h(z) = h(z) - h(z-1)$  und  $m = [5n \cdot 10^{-5}]$ . Der Satz ergibt sich dann aus dem Verschwinden der ganzen Zahlen  $b_n$  für  $n > n_0$ .  $b_n$  wird wieder durch ein Cauchysches Integral ausgedrückt, erstreckt über den Kreis  $|z| = n \sqrt{5} e^{i\varphi}$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Aus diesem Kreis wird ein Teilbogen  $-\delta < \varphi < \delta$  mit  $0 < \delta < \pi$ ,  $\cos \delta = 1 - 5 \cdot 10^{-5}$  ausgesondert. Dort wird der Integrand durch ein bestimmtes Integral, erstreckt von 0 bis  $+\infty$ , ersetzt und abgeschätzt, wobei der Hauptbetrag von dem Intervall  $[10^{-2}, 10^2]$  geliefert wird. Beim anderen Teilbogen führt die Stirlingsche Formel zum Ziel. Aus den erhaltenen Abschätzungen folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , also  $b_n = 0$  für  $n > n_0$ . Pisot (Greifswald).

**Selberg, Atle: Über einen Satz von A. Gelfond.** Arch. Math. og Naturvid., B 44, Nr 15, 1—12 (1941).

Sei  $g(z)$  eine ganze Funktion, die mit ihren  $p-1$  ersten Ableitungen für alle nicht negativen rationalen ganzen Zahlen ganzzahlige Werte annimmt, und es gebe zwei feste Zahlen  $\theta$ ,  $\gamma$  so, daß  $\log |g(z)| < \theta |z| + \gamma$ . Gelfond hat bewiesen [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 10, 569—574 (1929)], daß  $g(z)$  ein Polynom ist, wenn  $\theta < p \log \left(1 + e^{\frac{1-p}{p}}\right)$ . Verf. zeigt den gleichen Satz mit einer größeren Schranke für  $\theta$ , und zwar für  $\theta < \log \left\{ \min_{i=1}^p (1 + y_i) \right\}$  unter den Nebenbedingungen  $y_i > 0$ ,  $e^{p-1} y_1 \dots y_p = 1$ , und  $\left| \prod_{i < j} (y_i^{-1} - y_j^{-1}) \right| = 1$ . Zum rechnerisch nicht ganz einfachen Beweis wird ein von  $n$  und einem Parameter  $\alpha$  abhängiges Polynom  $Q_n(z)$  konstruiert von der Form  $\prod (z - m)^\mu$ , wo  $m$  eine gewisse Reihe aufeinanderfolgender ganzer Zahlen durchläuft und  $\mu \leq p$  ist. Sei  $B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{g(z)}{Q_n(z)} dz$ , erstreckt über eine Kurve  $\Gamma_n$ , die alle Zahlen  $m$  umschließt. Es wird gezeigt, daß  $g(z)$  ein Polynom ist, wenn alle  $B_n$  für  $n > n_0$  verschwinden. Andererseits folgt aus der Ganzwertigkeit der Funktion  $g(z)$  und ihrer Ableitungen, daß die Zahlen  $C_n B_n$  ganz sind, wenn  $C_n$  ein gewisses Fakultätenprodukt bedeutet.  $|B_n|$  wird auf einem Kreis abgeschätzt, dessen Radius von einem zweiten Parameter  $\beta$  abhängt. Durch geeignete Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  wird erreicht, daß, für wachsendes  $n$ ,  $C_n B_n$  nach Null strebt, also Null wird, wenn  $\theta$  unter der angegebenen größeren Schranke liegt. Pisot (Greifswald).

**Sz. Nagy, Gyula v.: Über ganze Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.** Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 303—311 (1940).

Als Verschärfung Laguerrescher Sätze beweist Verf. folgenden Satz: 1. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  ( $\beta > \alpha$ ) zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer ganzen Funktion  $f(x)$  vom Geschlecht Null und mit lauter reellen Nullstellen, unter denen  $\alpha$  bzw.  $\beta$  die Vielfachheit  $q$  bzw.  $r$  besitzt, bezeichnen ferner  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots$  die Nullstellen von  $f(x)$ , die kleiner als  $\alpha$  bzw. größer als  $\beta$  sind (jede Nullstelle so oft gerechnet, wie ihre Vielfachheit), und bedeutet endlich  $S_\alpha$  bzw.  $S_\beta$  die Summe

$$S_\alpha = q + \sum_n \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha_n} \quad \text{bzw.} \quad S_\beta = r + \sum_k \frac{\beta - \alpha}{\beta_k - \alpha},$$



so erhält man für die im Innern der Strecke  $(\alpha, \beta)$  liegende Nullstelle  $x_0$  der Derivierten  $f'(x)$  die Ungleichung

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{q + s_\beta} q < x_0 < \beta - \frac{\beta - \alpha}{r + s_\alpha} r.$$

Dazu gibt Verf. Übertragungen dieses Satzes auf reelle ganze Funktionen vom Geschlecht 0 und auf einfache ganze Funktionen von beliebigem endlichem Geschlecht. *Saxer*.

**Hibbert, Lucien:** Réseau  $\log R = \text{const.}$ ,  $V = \text{const.}$ , des fonctions entières. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 395—409 (1940).

Als Vorbereitung zur geometrischen Beschreibung der Struktur ganzer Funktionen  $g(z)$  in der Umgebung ihrer wesentlichen Singularität wird eine eingehende Betrachtung über den Verlauf der Kurven  $R = |g(z)| = \text{konst.}$  und  $V = \arg g(z) = \text{konst.}$  angestellt und eine wörterreiche Fachsprache entwickelt. Die Sätze sind kaum mehr als Einordnung von klassischen Tatsachen in dieses Gewand. *Ullrich* (Gießen).

**Hibbert, Lucien:** Résolution des équations  $z^n = z - a$ . Bull. Sci. math., II. s. 65, 21—50 (1941).

Eingehende Erörterung der Lage der Nullstellen von  $z^n - z + a$  für verschiedene  $a$  im Zusammenhang mit der Zerlegung der  $z$ -Ebene in Schlichtheitszellen (cellules d'univalence) für die rationale Funktion  $w = \frac{z - a}{z^n}$ . Die Nullstellen werden durch iterative Rechenverfahren bestimmt. *Ullrich* (Gießen).

**Valiron, Georges:** Division en feuillets de la surface de Riemann définie par  $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$ . J. Math. pures appl., IX. s. 19, 339—358 (1940).

Während die von  $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$  erzeugte Riemannsche Fläche für verschiedene Werte der Konstanten  $h$  keine Gestaltänderung erfährt, ergibt sich bei Abwandlung von  $h$  eine starke Änderung in der Blätterzerlegung bzw. in den Schlichtheitszellen in der  $z$ -Ebene, wenn man diese durch Kurven  $\arg w = \text{konst.}$  abteilt. Verf. greift das für  $h = 0$  schon in Iversens These (Helsingfors 1914) als Beleg für eine unmittelbare und mittelbare Randstelle eingehend behandelte Beispiel nochmals auf und zeigt an  $h = 0, -1, +1$  bemerkenswerte Erscheinungen in der Zerlegung der  $z$ -Ebene in Schlichtheitszellen, die ihm eine allgemeinere Fallunterscheidung nebst Terminologie nahelegen (vgl. dies. Zbl. 21, 334). *Ullrich* (Gießen).

**Cartwright, M. L.:** On level curves of integral functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 277—290 (1940).

Eine Punktmenge, auf der  $|f(z)|$  konstant ist, heißt Niveaukurve (level curve). Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind die offenen Niveaukurven, d. h. jene, die sich ins Unendliche erstrecken. Geschlossene Niveaukurven sind von G. Valiron (Lectures on the general Theory of integral functions, Cambridge 1923) und Verf. [Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 468—474 (1937); dies. Zbl. 17, 315] untersucht worden. Verf. sucht jene Resultate auf offene Niveaukurven zu übertragen. Die Verhältnisse sind hier jedoch verwickelter. Unter den vielen Resultaten seien hervorgehoben: 1. Sind  $f(z)$  und  $g(z)$  ganze Funktionen endlicher Ordnung und  $D$  ein einfach zusammenhängender Bereich, derart, daß  $|f| > M$  und  $|g| > M'$  in  $D$  und  $|f| = M$ ,  $|g| = M'$  auf dem Rande gilt, so ist  $f(z) = M \left( \frac{g(z)}{M'} \right)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . — 2. Wird der Bereich  $D$  von einer offenen einfachen Kurve  $C$  begrenzt, ist  $|g| > 1$ ,  $|f| < 1$  in  $D$  und  $|g| = 1$ ,  $|f| = 1$  auf  $C$ , so ist  $g(z) = (g_0(z))^\mu$ ,  $f(z) = e^{i\lambda} \left\{ \frac{1 - \bar{\gamma} g_0(z)}{g_0(z) - \gamma} \right\}^\nu$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu$  und  $\nu$  positiv ganz,  $\gamma$  ein Wert, der von  $g_0(z)$  nicht angenommen wird. *Pflüger*.

**Suñer y Balaguer, F.:** Über einen Satz des Professor Picard. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 1, 27—28 (1939) [Spanisch].

Il s'agit du théorème d'après lequel une fonction méromorphe en tout point à distance finie prend toute valeur sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. L'au.

donne une démonstration nouvelle (et très peu directe de l'avis du Réf.) basée sur ce que les fonctions méromorphes dans un domaine et y admettant trois valeurs exceptionnelles forment une famille normale. *G. Valiron* (Paris).

**Herzog, Fritz: Uniqueness theorems for rational functions.** Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 942—950 (1940).

Die Nevanlinnaschen Eindeutigkeitssätze für gebrochene Transzendenten [Acta math. **48**, 367—391 (1926)] veranlassen die Überprüfung der entsprechenden Frage bei rationalen Funktionen. Zwei solche sind identisch, wenn sie (es genügt in der punktierten Ebene) 4 punktgleiche Sorten zeigen, ohne Rücksicht auf Vielfachheiten. Indes genügten 3 punktgleiche Sorten noch nicht für die eindeutige Festlegung. Verf. gibt einen Satz, in dem die notwendigen Bedingungen festgestellt werden, welche für das Vorhandensein verschiedener rationaler Funktionen mit 3 punktgleichen Sorten bestehen. An Hand des Satzes kann eine Konstruktionsvorschrift für Beispiele dieser Art gegeben werden. Indes gibt es stets nur endlich viele solche Funktionen. — Dem Verf. sind die einschlägigen Ergebnisse von Maruyama entgangen (dies. Zbl. **16**, 264). *Ullrich* (Gießen).

**Loomis, Lynn H.: The decomposition of meromorphic functions into rational functions of univalent functions.** Trans. Amer. Math. Soc. **50**, 1—14 (1941).

$f(z)$  étant une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe  $R$ , l'auteur se propose de la mettre sous la forme  $f(z) \equiv g(h(z))$ , où  $g(\zeta)$  est une fraction rationnelle et où  $\zeta = h(z)$  est univalente dans  $R$ . Il se ramène au cas où  $R$  est le cercle  $|z| < 1$ .  $f(z)$  est dite rationnellement multivalente en un point  $z_0$  de module 1 s'il existe dans  $|z| < 1$  un voisinage de  $z_0$  que  $w = f(z)$  représente sur une portion de surface rationnelle (de Riemann). Une surface rationnelle est la surface décrite par les valeurs d'une fraction rationnelle. S'il suffit de prendre la surface décrite par une puissance entière,  $f(z)$  est dite multivalente comme une puissance en  $z_0$ . Voici quelques uns des résultats: I.  $f(z)$  étant méromorphe pour  $|z| < 1$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $f(z) \equiv g(h(z))$ ,  $g(\zeta)$  étant rationnelle et  $h(z)$  bornée et univalente pour  $|z| < 1$ , est que  $f(z)$  soit rationnellement multivalente en tout point de  $|z| = 1$ . II. Si  $f(z)$  est méromorphe pour  $|z| < 1$  et continue pour  $|z| = 1$ , la condition néc. et suf. pour que l'on ait la même décomposition que dans I est que  $f(z)$  soit multivalente comme une puissance en tout point de  $|z| = 1$ . III. Si  $f(z)$  est holomorphe et bornée pour  $|z| < 1$ , il reste valable si  $g(\zeta)$  est assujéti à être un polynôme, ou à être une fraction rationnelle laissant invariant  $|z| < 1$  (fonctions à cercle fondamental invariant de Fatou). IV. Si  $f(z)$  est méromorphe pour  $|z| < 1$  et si ses valeurs limites radiales appartiennent à une courbe fermée qui ne se recoupe qu'un nombre fini de fois, on a  $f(z) = g(h(z))$ ,  $g(\zeta)$  étant rationnelle et  $\zeta = h(z)$  représentant  $|z| < 1$  sur l'intérieur d'une courbe de Jordan. Les démonstrations reposent sur les théorèmes classiques sur les valeurs limites radiales (Fatou, M. et F. Riesz), sur les valeurs limites (Lindelöf) et surtout sur la représentation conforme des surfaces de Riemann (voir Julia, Principes géométriques d'analyse I, 1932; ce Zbl. **4**, 10 et Bieberbach Funktionentheorie II, 1931; ce Zbl. **1**, 211). *G. Valiron* (Paris).

**Broggi, Ugo: Sulle funzioni regolari nel circolo unità.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 363—366 (1941).

Aus Sätzen von H. J. Mellin (vgl. z. B. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 119—123; dies. Zbl. **18**, 129) über das identische Verschwinden in einer Halbebene regulärer Funktionen  $f(s)$  werden durch Anwendung der linearen Transformation  $z = \frac{s-1}{s}$  entsprechende Sätze über das identische Verschwinden im Einheitskreis, regulärer Funktionen  $\varphi(z)$  abgeleitet.

*F. Lösch* (Rostock).



**Wolff, J.:** Séries se rapportant aux fonctions holomorphes bornées. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 619—624 (1941).

$w = f(z)$  sei in der rechten Halbebene  $\mathfrak{H}_z$  regulär und habe einen auf  $\mathfrak{H}_w$  beschränkten Wertevorrat. Wenn dann die Punktfolge  $z_n \rightarrow \infty$  die Forderungen

$$|z_{n+1}| \geq p |z_n|, \quad p > 1, \quad |\arg z_n| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

erfüllt, so konvergiert die Reihe

$$\sum_1^\infty \left| \Im \frac{f(z_n)}{z_n} \right|, \quad \text{bzw.} \quad \sum_1^\infty \left| \Im \left( \frac{\xi - z_n}{\xi + z_n} \cdot \frac{\xi + f(z_n)}{\xi - f(z_n)} \right) \right|$$

bei Übertragung der Voraussetzungen in den Einheitskreis mit  $\infty \leftrightarrow \xi$ ,  $|\xi| = 1$ . Die Forderung über  $\arg z_n$  kann nicht unterdrückt werden. — Wieder in  $\mathfrak{H}_z$  ist für die Konvergenz (auf jeder Folge obiger Art) von  $\sum \Im(z_n f(z_n))$  notwendig und hinreichend die Existenz und Endlichkeit des  $\lim z/f(z)$  im Winkel für  $z \rightarrow \infty$ . Es werden noch mehrere ähnliche Aussagen gemacht, wobei u. a. der Fall  $z_n = p^n z$  auf eine analytische Funktion mit der Funktionalgleichung  $\Phi(pz) = \Phi(z) + \text{konst.}$  führt. *Ullrich.*

**Kwesselawa, D.:** Zum Lindelöfschen Prinzip. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 713—715 [Russisch] u. dtsh. Text 715—718 (1940).

Zwei reguläre Funktionen  $f_\nu(z)$  ( $\nu = 1, 2$ ) mögen den Einheitskreis  $|z| < 1$  in Gebiete  $\mathfrak{D}_\nu$  mit  $f_\nu(0) = 0$  abbilden; dann lehrt Lindelöfs Prinzip: Aus  $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$  folgt  $|f'_1(0)| \leq |f'_2(0)|$ . Verf. definiert: Ist der Rand  $\Gamma_\nu$  von  $\mathfrak{D}_\nu$  durch  $\varrho = \varrho_\nu(\varphi)$  dargestellt (stetig, geschlossen  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), so heißen  $\Gamma_1, \Gamma_2$  radialnahe auf  $\varepsilon$ , wenn für alle  $\varphi$  gilt  $|\varrho_1(\varphi) - \varrho_2(\varphi)| \leq \varepsilon$ . Verf. behauptet, daß dann bei  $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$  das Lindelöfsche Prinzip (zusammen mit dem Koebschen Verzerrungssatz) auch noch  $|f'_2(0)| \leq |f'_1(0)| + 4\varepsilon$  liefere; der Beweis der Verf. gilt aber nur für sternige Gebiete, da sonst ein durch Streckung vergrößertes  $\mathfrak{D}_1$  das  $\mathfrak{D}_2$  nicht zu enthalten braucht; das ist übersehen. — *Korollare.* *Ullrich* (Gießen).

**Carathéodory, C.:** Über das Maximum des absoluten Betrages des Differenzenquotienten für unimodular beschränkte Funktionen. Math. Z. 47, 468—488 (1941).

Für zwei fest vorgegebene Punkte  $z_1, z_2$  im Einheitskreise bezeichne

$$M(z_1, z_2) = \max \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \quad \text{für alle} \quad |f(z)| < 1 \quad \text{in} \quad |z| < 1,$$

$f(z)$  dort regulär,  $f(0) = 0$ . Verf. ergänzt seine frühere Untersuchung in Bull. Amer. Math. Soc. 43, 231—241 (1937) (dies Zbl. 16, 216) durch vollständige Berechnung von  $M(z_1, z_2)$  und findet dafür  $\text{Co}\{\tau - \sigma\}$  bzw. 1, je nachdem  $|z_1| + |z_2|$  größer oder kleinergleich  $|1 - \bar{z}_1 z_2|$  ist;  $\sigma$  und  $\tau$  ergeben sich als die reellen nichtnegativen Werte von

$$\sigma = \Re \text{Co}\left\{ \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{z_2 - z_1} \right\}, \quad \tau = \Re \text{Co}\left\{ \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_2 - z_1|} \right\}.$$

Für verschiedene spezielle Lagen wird  $M(z_1, z_2)$  näher untersucht und abgeschätzt, wobei nur in genau angebbaren Fällen die Schranken erreicht werden können. Für  $z_1 = h$  positiv reell wird die Kurve  $M(h, z) = \text{const}$  als algebraisch von der achten Ordnung erkannt und auf dem Wege über konforme Abbildung eingehender untersucht. Ist  $z = re^{i\vartheta}$ , so wird  $M(h, re^{i\vartheta}) < \frac{1}{\sin \vartheta/2}$ . — Das Maximum  $M(z_1, z_2)$  wird nur erreicht bei den Extremalfunktionen der Form  $z \frac{k - z}{1 - \bar{k}z}$ ;  $k$  und die Koordinate

des Verzweigungspunktes lassen sich formelmäßig aus  $z_1, z_2$  ausdrücken. *Ullrich.*

**Onofri, Luigi:** Sulle funzioni univalenti in una corona circolare. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 113—115 (1941).

Hinreichend für schlichte Abbildung eines Kreisrings  $r < |z| < R$  durch eine dort regulär analytische Funktion  $f(z)$  ist die Existenz eines reellen  $\alpha$  so, daß im Ringe

$$0 < \Re \left\{ e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < 2|\cos \alpha|$$

gilt. Beweis: Argumentprinzip. Anwendung bei der Laurententwicklung von  $f(z)$ .

*Ullrich* (Gießen).

**Pfluger, A.: Konforme Abbildung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel.** Comment. math. helv. **13**, 284—292 (1941).

En utilisant le principe de la variation de l'argument et en effectuant des intégrations comme celles qui peuvent conduire au théorème de Jensen, l'auteur établit d'abord ce théorème: Soient  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le domaine  $0 \leq r_1 \leq |z| \leq r_2$ ,  $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ , et sur sa frontière, qui ne s'annule pas sur cette frontière;  $n(r)$  le nombre de ses zéros dans le secteur  $r_1 < |z| \leq r$ ,  $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ , et  $\bar{n}(\theta)$  le nombre de ses zéros dans le secteur  $r_1 < |z| < r_2$ ,  $\varphi_1 < \arg z < \theta$ . On a

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} n(r) \frac{dr}{r} + \int_{r_1}^{r_2} [\arg f(re^{i\varphi_2}) - \arg f(re^{i\varphi_1})] \frac{dr}{r} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\log |f(r_2 e^{i\theta})| - \log |f(r_1 e^{i\theta})|] d\theta;$$

$$2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{n}(\theta) d\theta + \int_{r_1}^{r_2} [\log |f(re^{i\varphi_2})| - \log |f(re^{i\varphi_1})|] \frac{dr}{r} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta})] d\theta;$$

l'argument de  $f(z)$  est suivi par continuité sur la frontière supposée coupée au sommet  $r_2 e^{i\varphi_2}$ . Ces formules s'étendent au cas où  $f(z)$  s'annule sur la frontière; on suit alors la variation de l'argument de  $f(z)$  en contournant les zéros sur de petits cercles dans un sens convenable. On a ainsi généralisé et étendu la formule de Jensen; dans le cas du cercle complet ( $r_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$ ) la seconde formule donne des bornes du nombre des zéros dans un secteur d'ouverture moindre que  $2\pi$ . En particulier l'auteur obtient des relations entre la position du zéro d'une fonction qui donne la représentation conforme simple du secteur considéré sur le cercle unité et les moyennes logarithmiques de l'argument de cette fonction sur les côtés du secteur. Il suggère l'étude du problème analogue dans le cas où le secteur est remplacé par un domaine simplement connexe quelconque limité par un nombre fini d'arcs de courbes de Jordan.

*G. Valiron (Paris).*

**Kametani, Shunji: Boundary values of analytic functions.** Proc. Imp. Acad. Jap. **17**, 60—64 (1941).

L'auteur donne un théorème sur les valeurs limites d'une fonction analytique sur un contour limite de Jordan rectifiable  $C$ . Ce théorème contient comme corollaires les théorèmes bien connus de Priwaloff et de Fatou. — Les conditions du théorème de l'auteur sont les suivantes: 1°)  $C$  a une tangente en  $t$ , 2°)  $F(t)$  étant mesurable et bornée sur  $C$   $F'(t)$  existe et est fini, 3°)  $\int_C \frac{F(t)}{(t-z')^2} dt = 0$  pour tout  $z'$  extérieur à  $C$ . — Il

en déduit au moyen de méthodes analogues à celles de Priwaloff [Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques; J. École polytechn., II. s. **24**, 77—112 (1924)] que  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)}{(t-z)^2} dt$ ,  $z$  étant intérieur à  $C$ , tend vers  $F'(t_1)$  quand  $z$  tend vers  $t_1$

non tangentiellement à  $C$ .

*Daniel Dugué (Paris).*

**Kwesselawa, D., und N. Vecoua: Über ein Randwertproblem der komplexen Funktionentheorie.** Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 233—239 u. dtsh. Zusammenfassung 239—240 (1941) [Russisch].

Die Verf. haben folgende Randwertaufgabe behandelt:  $\mathfrak{C}$  sei eine einfache geschlossene, glatte Kurve,  $S^+$ ,  $S^-$  ihr Inneres bzw. Äußeres;  $\varphi(z)$  in  $S^+$ ,  $S^-$  regulär mit stetigen Randwerten  $\varphi^+(x)$ ,  $\varphi^-(x)$  von beiden Seiten,  $x$  auf  $\mathfrak{C}$ . Diese Randwerte sollen für ein System von  $n$  Funktionen verknüpft sein durch

$$\varphi_\nu^+(x) = a_{\nu 1} \varphi_1^-(x) + \dots + a_{\nu n} \varphi_n^-(x) + b_\nu(x), \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

wobei die Koeffizienten  $a, b$  auf  $\mathfrak{C}$  die Hölderbedingung  $|a(x_2) - a(x_1)| \leq A|x_2 - x_1|^\lambda$  mit  $0 < \lambda \leq 1$  erfüllen. Diese Aufgabe ist im homogenen Fall (alle  $b_\nu(x) \equiv 0$ ) von Plemelj behandelt [Mh. Math. Phys. **19**, 211—246 (1908)], in einem inhomogenen Fall von Gachow (dies Zbl. **21**, 143), wobei jedesmal eine begleitende Aufgabe unter



Vertauschung der  $+$  und  $-$  auftritt und Lösungen alternativ erscheinen oder fehlen. Die Verf. geben hier im homogenen wie im inhomogenen Fall formale, vollständige Lösungen durch Quadraturen, unter der zusätzlichen Annahme (neben den selbstverständlichen Voraussetzungen)  $a_{\nu\kappa}(x) = \omega_{\nu\kappa}(x) a_{1\kappa}(x)$  ( $\nu = 2, \dots, n; \kappa = 1, 2, \dots, n$ ), wo die  $\omega_{\nu\kappa}(x)$  Randwerte von in  $S^+$  regulären, auf  $S^+ + \mathfrak{C}$  stetigen und nichtverschwindenden Funktionen sind. — Ref. konnte sich keinen Einblick in die Arbeit von Gachow verschaffen und daher nicht erkennen, worin die Verf. über ihn hinausgekommen sind. Ulrich (Gießen).

**Heins, Maurice H.: A generalization of the Aumann-Carathéodory „Starrheitssatz“.** Duke math. J. 8, 312—316 (1941).

Die in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{G}_\omega$  regulären und einwertigen Funktionen mit dem Festpunkt  $\omega$  gestatten die Auswahl zweier Klassen  $C_1$ : Der Wertevorrat erfüllt ganz  $\mathfrak{G}_\omega$  und  $C_2$ : Der Wertevorrat ist echter Teil von  $\mathfrak{G}_\omega$ . Der Starrheitssatz [Aumann und Carathéodory, Math. Ann. 109, 756—763 (1934); dies. Zbl. 9, 26] lehrt, daß die Ableitungen aller Funktionen von  $C_2$  in  $\omega$  durch eine Konstante  $\Omega(\omega, \mathfrak{G}_\omega) < 1$  gleichmäßig beschränkt sind. Daraus folgt (und das ist dem Starrheitssatz äquivalent), daß keine Funktion aus  $C_1$  durch eine Folge aus  $C_2$  gleichmäßig innerhalb  $\mathfrak{G}_\omega$  angenähert werden kann. Verf. beweist allgemeiner: Ist  $\mathfrak{F}_\omega$  ein mehrfach zusammenhängendes Riemannsches Flächenstück, dessen universelle Überlagerungsfläche hyperbolischen Typus zeigt, während die zugeordnete Fundamentalgruppe nicht zyklisch ist, so kann die identische Abbildung von  $\mathfrak{F}_\omega$  auf sich selbst nicht als Grenze einer Folge nichtidentischer einwertiger Abbildungen von  $\mathfrak{F}_\omega$  (wie  $C_2$ ) gewonnen werden. Aus diesem Satz folgen neben dem Starrheitssatz einige klassische Sätze über konforme Abbildung. Ulrich (Gießen).

**Heins, Maurice H.: A note on a theorem of Radó concerning the  $(1, m)$  conformal maps of a multiply-connected region into itself.** Bull. Amer. Math. Soc. 47, 128—130 (1941).

Ein  $p$ -fach zusammenhängendes Gebiet kann nicht genau ein- $m$ -deutig auf sich selbst abgebildet werden, wenn  $m > 1$  und  $1 < p < \infty$  ist. Verf. gibt für diesen Satz von Radó einen Beweis, der sich auf Iteration und harmonisches Maß stützt. Ulrich.

**Schapiro, Z.: Sur l'existence des représentations quasi-conformes.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 690—692 (1941).

Verallgemeinerung und Beweisskizze des Existenzsatzes für quasi-konforme Abbildungen von Lavrentieff (vgl. dies. Zbl. 12, 215 und 14, 319). Ulrich (Gießen).

**Lelong, Pierre: Sur les domaines cerclés qui sont domaines naturels d'existence d'une fonction analytique de deux variables complexes.** C. R. Acad. Sci., Paris 212, 426—428 (1941).

Verf. kündigt an, daß er den Hartogsschen Satz [Math. Ann. 62, 1—88 (1906)]: „Notwendig und hinreichend, damit ein Hartogsscher Bereich  $|z| < R(w)$  der Konvergenzbereich einer Reihe  $\sum_0^\infty A_n(w)z^n$  ist, ist der superharmonische Charakter von  $\log R(w)$ “, ohne eine Voraussetzung über die 2-ten Ableitungen von  $R(w)$  beweisen kann. Entsprechendes gilt dann natürlich über den Hartogsschen Bereich als Regularitätsbereich. — Bei der Lektüre ist zu beachten, daß Verf. die Begriffe Singularität und Hartogsscher Bereich anders definiert als in der Funktionentheorie m. V. in Frankreich und Deutschland üblich. Behnke (Münster i. W.).

**Martinelli, Enzo: Sulle funzioni analitiche di più variabili complesse con periodi infinitesimi.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 213—215 (1941).

Verf. gibt eine geometrische Interpretation eines Beweises (siehe Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II<sub>2</sub>, 1932, S. 520; dies. Zbl. 5, 299) des folgenden Satzes von Weierstraß: Eine eindeutige, analytische Funktion  $F(z_1, \dots, z_n)$ , welche unendlich kleine Perioden zuläßt, hängt von weniger als  $n$  geeignet gewählten, linearen

Kombinationen der Argumente ab. — Verf. gibt auch eine geometrische Deutung solcher linearer Kombinationen. *Behnke (Münster i. W.).*

**Spampinato, Nicolò:** *Sulle funzioni in un'algebra complessa dotata di modulo. Applicazioni alle algebre dei ternioni, dei numeri triduali e dei numeri tripotenziali.* Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 2, 193—231 (1941).

Verf. setzt die von ihm in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 7, 290; 9, 119; 13, 340) begonnene Theorie der Funktionen  $y(x)$  einer Veränderlichen  $x$  in einer komplexen Algebra der Ordnung  $n$  mit Einheitselement fort. Nach Abbildung von  $x$  auf die Punkte eines reell-euklidischen  $S_{2n}$  zeigt Verf. zunächst, daß die Funktionen mit einer einzigen charakteristischen Ableitung, d. h. bei denen die längs der durch  $x_0$  gehenden charakteristischen Ebenen des  $S_{2n}$  gebildeten Ableitungen gleich sind, mit den vollständig differenzierbaren Funktionen zusammenfallen; dies Ergebnis hatte Verf. schon auf anderem Wege in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 12, 102) erhalten. Eine samt ihren Ableitungen vollständig differenzierbare Funktion  $y(x)$  ist in eine eindeutig bestimmte Potenzreihe nach  $x - x_0$ , die in einer  $2n$ -dimensionalen  $S_{2n}$ -Umgebung von  $x_0$  gilt, entwickelbar. Umgekehrt stellt eine derartige Potenzreihe eine  $y(x)$  dar, die wohl in  $x_0$ , nicht aber notwendig in jedem andern Punkte des Konvergenzgebietes der Reihe vollständig differenzierbar ist; hingegen tritt die letztgenannte Erscheinung immer dann ein, wenn die zugrunde liegende Algebra kommutativ ist; bei einer nicht-kommutativen Algebra werden die Potenzreihen, die in jedem Punkte ihres Konvergenzgebietes vollständig differenzierbar sind, vom Verf. als „speziell“ bezeichnet. Die bezeichneten Eigenschaften werden vom Verf. in den Fällen der Algebra der Ternionen, der tridualen und der tripotentialen Zahlen vereinfacht. — Schließlich beweist Verf. für diese Algebren 3. Ordnung einige Eigenschaften, die sich als Sonderfälle eines einer späteren Arbeit vorbehaltenen allgemeinen Satzes erweisen, demzufolge in jeder irreduziblen komplexen Algebra mit Einheitselement eine allgemeine algebraische Gleichung  $r$ -ten Grades  $r^s$  Wurzeln besitzt, wobei  $s$  die Differenz zwischen der Ordnung der vorgegebenen Algebra und der ihres Radikals bezeichnet. *E. Martinelli (Roma).*

### **Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:**

**Fubini, Guido:** *On hyperautomorphic functions.* Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A; Mat. 1, 87—94 (1940).

Verf. spricht u. a. über die Bedeutung der Siegelschen Theorie der Modulfunktionen  $n$ -ten Grades und über Möglichkeiten, sie auf Grund ihrer Analogie zur Theorie der automorphen Funktionen in einer Variablen (Poincaré, Klein) weiterzuführen.

*Maaß (Heidelberg).*

**Bang, Thøger:** *Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques.* Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 19, Nr 4, 1—28 (1941).

$f_0(x)$  sei eine auf der ganzen reellen Achse definierte reelle Funktion mit endlichem  $M_0 = \overline{\lim}_{|x| < \infty} |f_0(x)|$ ; sie besitze ein fastperiodisches Integral  $n$ -ter Ordnung  $f_n(x)$ , dessen sukzessive Ableitungen die Integrale  $k$ -ter Ordnung  $f_k(x)$ , ( $k = 1 \dots n - 1$ ) seien; setzt man  $M_k = \overline{\lim}_{|x| < \infty} |f_k(x)|$ ,  $k = 1 \dots n$ , so gilt die Kolmogoroffsche Ungleichung

$$(1) \quad M_k \leq M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \cdot t_k t_n^{-\frac{k}{n}}; \quad t_i = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \right)^{i+1},$$

in der das Gleichheitszeichen für die Extremalfunktion  $f_0(x) = \varphi_0(x) = \text{sign} \sin x$  erreicht wird. Dies wird bewiesen. Ist insbesondere  $f_0(x) = \sum_{\nu=1}^k a_\nu \exp(i\lambda_\nu x)$  eine endliche trigonometrische Summe und  $f_n(x) = \sum_{\nu=1}^k a_\nu (i\lambda_\nu)^{-n} \exp(i\lambda_\nu x)$ , so folgt daraus die Bohr-Favardsche Ungleichung  $M_n \leq M_0 t_n (\min |\lambda_\nu|)^{-n}$  und für die  $n$ -te Ableitung



$f_0^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^k a_\nu (i\lambda_\nu)^n \exp(i\lambda_\nu x)$  die Bernsteinsche Abschätzung

$$\overline{\lim}_{x < \infty} |f_0^{(n)}(x)| \leq M_0 \max |\lambda_\nu|^n.$$

Diese Ungleichungen lassen sich auf gebrochene Integrale erweitern; ist

$$f_0(x) = \sum a_\nu \exp(i\lambda_\nu x)$$

eine fastperiodische Funktion, so bezeichnet man  $f_\alpha(x) = \sum a_\nu (i\lambda_\nu)^{-\alpha} \exp(i\lambda_\nu x)$  bei reellem oder komplexem  $\alpha$ , falls sie eine fastperiodische Funktion darstellt, als Integral  $\alpha$ -ter Ordnung. Bedeutet  $\alpha_0 = \Re \alpha$  usw., und ist  $\gamma_0 < \alpha_0 < \beta_0$ , so gilt in Verallgemeinerung von (1):

$$(2) \quad M_\alpha \leq M_\gamma^{\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_0 - \gamma_0}} \cdot M_\beta^{\frac{\alpha_0 - \gamma_0}{\beta_0 - \gamma_0}} \cdot K_{\beta - \gamma}^{\alpha - \gamma},$$

wobei  $K$  eine von  $\alpha - \gamma, \beta - \gamma$  allein abhängende Konstante bedeutet; jetzt ist  $\varphi_0(x)$  nicht mehr Extremalfunktion; insbesondere gilt für eine endliche trigonometrische Summe  $f_0(x)$ :

$$M_\alpha \leq M_0 \cdot C(\alpha) \cdot (\min |\lambda_\nu|)^{-\alpha}, \quad M_{-\alpha} \leq M_0 \cdot D(\alpha) \cdot \max |\lambda_\nu|^{\alpha}.$$

Geht man umgekehrt von den fastperiodischen Funktionen  $f_\gamma(x), f_\beta(x), \gamma_0 < \beta_0$  aus, so stellt für  $\gamma_0 < \alpha_0 < \beta_0$  die Fourierreihe  $f_\alpha(x)$  eine durch (2) beschränkte fastperiodische Funktion dar; daher bildet die Gesamtheit der Zahlen  $\alpha$ , für die  $\sum a_\nu (i\lambda_\nu)^{-\alpha} \exp(i\lambda_\nu x)$  eine fastperiodische Funktion darstellt, in der komplexen Ebene einen Vertikalstreifen. — Vermöge der Tatsache, daß man zu beliebiger beschränkter Funktion  $f_0(x)$  stets eine periodische Funktion  $g_n(x)$  finden kann derart, daß

$$|\overline{\lim}_n |f_n^{(h)}(x)| - \overline{\lim}_n |g_n^{(h)}(x)|| < \varepsilon, \quad (h = 0, 1 \dots n)$$

ist, läßt sich (1) von der Voraussetzung der Fastperiodizität von  $f_n(x)$  befreien.

Harald Geppert (Berlin).

**Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On the convexity of averages of analytic almost periodic functions.** Amer. J. Math. 63, 581—583 (1941).

Die Verff. beweisen folgende weitgehende Verallgemeinerung des Hadamardschen Dreikreisesatzes: Die Funktion  $g = g(\sigma, t)$  auf  $\alpha \leq \sigma \leq \beta, -\infty < t < \infty$  sei nicht-negativ und subharmonisch, und es gelte 1)  $g(\sigma, t) = O(|t|^c)$  für  $t \rightarrow \pm \infty$  gleich-

mäßig in  $\sigma$ , wo  $c$  genügend groß; 2)  $\mu(T; \tau; \sigma) = \frac{1}{2T} \int_{\tau-T}^{\tau+T} g(\sigma, t) dt$  strebe für jedes  $\sigma$  in  $[\alpha, \beta]$  gegen  $M_t\{g(\sigma, t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau-T}^{\tau+T} g(\sigma, t) dt$  gleichmäßig in  $\tau$  für  $T \rightarrow \infty$ . Dann ist

$M_t\{g(\sigma, t)\}$  in  $\sigma$  konvex in  $[\alpha, \beta]$ . Beim Beweis genügt es, den Satz für jedes Teilintervall von  $[\alpha, \beta]$  zu zeigen. Es wird der Beweisgedanke von Satz 4 der Arbeit von Hardy, Ingham, Pólya, Notes on moduli and mean values [Proc. London Math. Soc., II. s. 27, 401—409 (1928)], wesentlich benützt. E. Hlawka (Wien).

**Wintner, Aurel: On the asymptotic behavior of the Riemann zeta-function on the line  $\sigma = 1$ .** Amer. J. Math. 63, 575—580 (1941).

Die asymptotische Verteilungsfunktion  $\psi(r)$  von  $|\zeta(1 + it)|$  läßt die Abschätzung für  $r \rightarrow 0$  zu:  $\psi(r) = O(\exp(-\lambda/r))$  ( $\lambda$  eine beliebige feste positive Zahl). Diese gegen eine frühere wesentlich verschärfte Abschätzung wird bewiesen unter Zuhilfenahme von Sätzen über  $B^2$ -fastperiodische Funktionen. Hoheisel (Köln-Lindenthal).

## Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

**Conte, Luigi: Sull'integrazione dell'equazione differenziale  $y' = Ay^3 + By^2 + Cy + D$ .** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 384—391 (1941).

Verf. nimmt die Untersuchung der Gleichung

$$(1) \quad y' = A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y + D(x)$$

wieder auf, die kürzlich von Lemke (dies. Zbl. **21**, 125) und A. Chiellini (dies. Zbl. **23**, 35) betrachtet wurde, und findet auf ziemlich einfache Weise einige Klassen von Gleichungen, die durch Quadraturen lösbar sind. Es folgen einige Bemerkungen über partikuläre Integrale von (1).  
*Giovanni Sansone* (Firenze).

**Wittich, Hans:** Ganze Lösungen der Differentialgleichung  $w'' = f(w)$ . Math. Z. **47**, 422—426 (1941).

En utilisant la théorie des fonctions méromorphes de R. Nevanlinna, l'aut. étudie l'existence des solutions entières de l'équ. différentielle

$$w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z)w' = f(w)$$

où les  $p_i(z)$  sont des polynômes et  $f(w)$  est une fonction entière. — Si  $f(w)$  est transcendante, il n'y a pas de solution entière; si  $f(w)$  est un polynôme de degré  $q \geq 2 + m$ , où  $m$  est le nombre de  $p_i \neq 0$ , il n'y a pas de solution transcendante entière. — Dans le cas particulier  $w^{(n)} = f(w)$  où  $f(w)$  est non linéaire et  $n \geq 2$ , il n'y a aucune solution entière (non constante).  
*J. Dufresnoy* (Paris).

**Bitterlich-Willmann, Johann:** Über die Asymptoten der Lösungen einer Differentialgleichung. Mh. Math. Phys. **50**, 35—39 (1941).

In der DGL.  $y'' + f(x)y = 0$  sei  $f$  stetig für  $x \geq a$ . Einer Lösung  $y(x)$  wird eine Asymptote zugeschrieben, wenn  $y'(x)$  und  $y(x) - xy'(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  Grenzwerte haben. Mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens werden diese Ausdrücke abgeschätzt und daraus die Resultate gewonnen: Ist  $|f(x)| < Cx^{-\alpha}$  für ein festes  $\alpha > 3$  und alle hinreichend großen  $x$ , so hat jede Lösung eine Asymptote. Hat  $f(x)$  für alle hinreichend großen  $x$  ein festes Vorzeichen, und ist dort

$$C_1 x^{-3} < |f(x)| < C_2 x^{-\alpha}$$

für ein festes  $\alpha > 2$ , so können die Lösungen höchstens eine Parallele zur  $x$ -Achse als Asymptote haben.  
*Kamke* (Tübingen).

**Calamai, Giulio:** Sulle soluzioni della equazione caratteristica relativa alla equazione differenziale lineare, omogenea, del secondo ordine, a coefficienti periodici. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 370—372 (1941).

Verf. beweist: Wenn für die Gleichung  $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$  mit periodischen

Koeffizienten der Periode  $\omega > 0$ ,  $q(t) < 0$  und  $e^{\int_0^\omega p(t)dt} \leq \frac{1}{4}$  ist, so besitzt sie mindestens ein Integral, das für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.  
*Giovanni Sansone*.

**Mambriani, A.:** Risoluzione di una classe d'equazioni differenziali lineari. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 198—201 (1941).

Verf. bestimmt das allgemeine Integral der folgenden Differentialgleichung:

$$(1) \quad P_n(x)y^{(n)} + \sum_{\kappa=1}^n \binom{\omega}{\kappa} P_{n\kappa}^{(\omega)}(x) y^{(n-\kappa)} = 0.$$

In ihr bedeuten  $y = y(x)$  die unbekannte Funktion,  $\omega$  eine Konstante,

$$\binom{\omega}{\kappa} = \frac{1}{\kappa!} \omega(\omega-1) \cdots (\omega-\kappa+1)$$

und  $P_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $x$ . Sind die Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  der Gleichung  $P_n(x) = 0$  paarweise verschieden und ist  $\omega \neq 1, 2, \dots, n-1$ , so hat die allgemeine Lösung von (1) die Form:  $y = \sum_{\kappa=1}^n c_\kappa (x - \alpha_\kappa)^{n-\omega-1}$ . Ähnlich einfach lauten die Ausdrücke der Integrale von (1), wenn die Gleichung  $P_n(x) = 0$  mehrfache Wurzeln besitzt oder  $\omega$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n-1$  ist.  
*Giovanni Sansone*.

**Lusin, N.:** Un cas du théorème de Janet-Riquier. **2, 3.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 419—424 (1941).

Fortsetzung (s. dies. Zbl. **25**, 50) der Untersuchungen über das System  $S$  von Differentialgleichungen  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei die  $x_i$  un-



bekannte Funktionen der unabhängig Veränderlichen  $t$ , die  $b_i$  gegebene und in einer Umgebung von  $t_0$  analytische Funktionen von  $t$  und ferner die  $a_{ij}$  Polynome zweiten Grades in  $\frac{d}{dt}$  mit konstanten Koeffizienten bedeuten. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Determinante  $|a_{ij}|$  nicht verschwindet. Es wird die Frage nach der Existenz der Lösungen des Systems  $S$  mit den Anfangswerten Null ( $x_i(t_0) = x'_i(t_0) = 0$ ), und zwar vorwiegend in dem Falle, daß die Funktionen  $b_2, \dots, b_n$  identisch verschwinden, behandelt. Das Hauptresultat besteht darin, daß unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Unterdeterminante von  $a_{11}$  gleich Null ist, die Existenz einer solchen Lösung, und zwar bei jeder Wahl der Funktion  $b_1(t)$ , das identische Verschwinden der unbekannten Funktion  $x_1$  mit sich bringt.

O. Borůvka (Brünn).

**Sona, Luigi:** Osservazione sulle soluzioni statiche di un sistema differenziale del primo ordine. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 218—222 (1941).

Der folgende Satz wird verallgemeinerter Dirichletscher Satz genannt: wenn  $\alpha$ ) das Differentialsystem

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ein Integral  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = C$  besitzt ( $C$  beliebige Konstante), wenn  $\beta$ ) in einem Punkt  $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  für jedes  $t$   $X_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gilt; wenn  $\gamma$ ) in  $P_0$  und für jedes  $t$  die Funktion  $\varphi$  ein effektives Maximum oder Minimum besitzt, dann ist  $x = x_1^0, x = x_2^0, \dots, x = x_n^0$  eine stationäre stabile Lösung des Systems (1). Im allgemeinen sind die Bedingungen  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) unabhängig. Fälle, in denen die Bedingungen  $\beta$ ) und  $\gamma$ ) voneinander abhängen, sind bekannt. Die vorliegende Arbeit gibt dafür folgenden Satz: Vorausgesetzt, daß a) die Funktionen  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , für jedes  $t$  mit ihren ersten partiellen Ableitungen in einem  $n$ -dimensionalen Bereich  $\Gamma$  stetig sind; b) das System (1) ein Integral  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$  besitzt; c) die von  $t$  unabhängige Funktion  $\varphi$  in  $\Gamma$  mit ihren ersten partiellen Ableitungen 3. Ordnung stetig ist; d) in einem Punkt  $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  von  $\Gamma$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gilt; e) die Hessesche Determinante  $\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$  in  $P_0$  nicht Null ist, dann hat man für jedes  $t$   $X_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , und  $x = x_1^0, \dots, x = x_n^0$  ist also eine Lösung des Systems (1), die nach dem Dirichletschen Satz stabil ist.

L. Cesari.

**Hamilton, Hugh J.:** On monotone and convex solutions of certain difference equations. Amer. J. Math. 63, 427—434 (1941).

Die Untersuchung knüpft an die Ergebnisse von John an (vgl. dies. Zbl. 21, 396). Dort sind unter geeigneten hinreichenden Bedingungen für  $g(x)$  bzw.  $G(x)$  Aussagen gemacht über die Einzigkeit (bis auf eine additive Konstante) der

- (1) monoton nicht abnehmenden Lösungen von  $f(x+1) - f(x) = g(x)$ ,
- (2) der streng konvexen Lösungen von  $F(x+1) - F(x) = G(x)$ .

Verf. bemerkt, daß zwischen den beiden Aufgaben für zugeordnete Differenzengleichungen eine gewisse Dualität herrscht und kann dann den Umstand ausnutzen, daß Johns Ergebnisse von diesem Standpunkt aus für (1) weiter reichten als für (2); so ergeben sich Verbesserungen. Beispiele zeigen, daß die Bedingungen noch nicht notwendig sind. Erweiterung auf die auch bei John behandelten allgemeineren Differenzengleichungen.

Ulrich (Gießen).

**Linfield, B. Z.:** On the explicit solution of simultaneous linear difference equations with constant coefficients. Amer. Math. Monthly 47, 552—554 (1940).

Ist  $dX/dt = AX$  ein System von simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ( $A$  Matrix), und ist

$$X = e^{rt} \left[ I + (A - rI)t + (A - rI)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + (A - rI)^{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right] C$$

eine Lösung ( $I$  Einheitsmatrix), dann ist

$$X = (1+r)^t \left[ I + \frac{A-rI}{1+r} \binom{t}{1} + \left( \frac{A-rI}{1+r} \right)^2 \binom{t}{2} + \dots + \left( \frac{A-rI}{1+r} \right)^{m-1} \binom{t}{m-1} \right] C$$

eine Lösung eines Systems von simultanen Differenzgleichungen  $\Delta X = AX$ ; dabei wird vorausgesetzt, daß  $\det(A - tI)$  einen Faktor  $t - r$  mit der Vielfachheit  $m$  besitzt und  $C$  eine Matrix ist, die die Bedingung  $(A - rI)^m C = 0$  erfüllt. An den Beweis schließt eine Bemerkung des Herausgebers der Amer. Math. Monthly: Genügen die Funktionen  $x_{a,i}$  dem Rekursionssystem

$$(\theta - a)x_{a,0} = 0, \quad (\theta - a)x_{a,i} = x_{a,i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

( $\theta$  linearer Operator) für eine Konstante  $a$  und ist  $r$  eine  $m$ -fache Wurzel von  $\det(A - tI) = 0$ ,

dann hat die Matrizengleichung  $\theta X = AX$  eine Lösung  $X = \sum_{i=0}^{m-1} (A - rI)^i x_{r,i} C$ , wo  $C$

eine Lösung von  $(A - rI)^m C = 0$  ist. Aus diesem Satz folgen der obige Satz von Linfield und Sätze von J. S. Frame, Amer. Math. Monthly 47, 35—38 (1940).

F. Knoll (Wien).

**Heins, Albert E.:** On the solution of partial difference equations. Amer. J. Math. 63, 435—442 (1941).

Verf. wendet die Methode der Laplacetransformation auf die Untersuchung der partiellen Differenzgleichung (1)  $F(x+1, t) + F(x-1, t) = 2F(x, t+1)$  mit vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen an. Die Transformierte der Lösung

von (1)  $f(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} F(x, t) dt$  genügt der Differenzgleichung

$$(2) \quad f(x+1, s) - 2e^s f(x, s) + f(x-1, s) = \psi(x, s),$$

wo  $\psi$  eine bekannte Funktion ist. Aus der bekannten Lösung von (2) erhält Verf. so dann durch Rückabbildung von  $f(x, s)$  die Funktion  $F(x, t)$  in Form einer Reihe.

Luigi Amerio (Roma).

### **Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:**

**Fubini, Guido:** Equazioni differenziali per i periodi di un integrale iperellittico. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 73—79 (1940).

Im Anschluß an eine Arbeit von Siegel [Math. Ann. 116, 617—657 (1939); dies. Zbl. 21, 203] stellt Verf. folgende Probleme auf: a) Differentialgleichungen für die Periodizitätsmoduln eines algebraischen Integrals als Funktion der Verzweigungspunkte aufzustellen. b) Die Untergruppen der Modulgruppe zu untersuchen, insbesondere die Kongruenzuntergruppen. c) Die zugehörigen Funktionen und ihre Verallgemeinerungen zu untersuchen. Verf. behandelt hier nur die Frage a) für den hyperelliptischen Fall. Es seien also  $\omega = \int_\lambda (u - a_1)^{g_1} (u - a_2)^{g_2} \dots (u - a_n)^{g_n} du$  die in

Rede stehenden Periodizitätsmoduln. Verf. gibt die folgenden Differentialgleichungen:

$$1. \quad \frac{\partial \omega}{\partial a_1} + \frac{\partial \omega}{\partial a_2} + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial a_n} = 0; \quad 2. \quad a_1 \frac{\partial \omega}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \omega}{\partial a_2} + \dots + a_n \frac{\partial \omega}{\partial a_n} = (1 + g_1 + g_2 + \dots + g_n) \omega;$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{1}{a_i - a_j} \left( g_j \frac{\partial \omega}{\partial a_i} - g_i \frac{\partial \omega}{\partial a_j} \right).$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich jede andere Differentialgleichung in eine von erster Ordnung oder auch in eine gewöhnliche, etwa in den Ableitungen nach  $a_1$ , verwandeln. Diese letztere wurde im elliptischen Fall von Pochhammer [J. reine angew. Math. 71, 316 bis 352 (1870)] aufgestellt.

Ott-Heinrich Keller (Flensburg-Mürwik).

**Kulk, W. van der:** Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der Pfaffschen Gleichungen für den einfachsten Fall  $m = 2$ . 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 625—635 (1941).

Diese Arbeit bildet eine unmittelbare Fortsetzung der in dies. Zbl. 25, 53 besprochenen Arbeit. Ein  $\mathfrak{S}_2^2$ -Feld wird als vollständig bezeichnet, wenn für jedes System



$\xi^\kappa, v^{\mu\lambda}$  des Feldes die Gleichungen  $v^{\omega\lambda} \left\{ \bar{\partial}_\omega \dot{F} + 2 \dot{F}_{\kappa\mu} v^{\mu\lambda} Z_{\omega\lambda}^\kappa \right\} = 0$ ;  $i = d+1, \dots, 2(n-2)$ ;  $\varrho = 1, \dots, n$ , mit den  $\frac{1}{2}n^2(n+1)$  in den Indizes  $\omega$  und  $\lambda$  symmetrischen Unbekannten  $Z_{\omega\lambda}^\kappa$  mindestens eine Lösung besitzen. Dabei bedeutet  $\bar{\partial}_\omega \dot{F} = \partial \dot{F} / \partial \xi^\omega$ ,  $\dot{F}_{\kappa\mu} = \partial \dot{F} / \partial v^{\kappa\mu}$ . Der vom Verf. bewiesene Hauptsatz besagt, daß ein vollständiges  $\mathfrak{S}_d^2$ -Feld, dessen  $\mathfrak{R}_t$ -Feld abwickelbar ist, vollständig integrierbar ist, und es werden Anfangsbedingungen, die eine zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit des Feldes eindeutig bestimmen, aufgestellt.

O. Borůvka (Brünn).

**Hölder, Ernst: Bemerkung zu Riemanns Abhandlung „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 14, 338—350 (1941).

Les équations différentielles du mouvement nonstationnaire à une dimension d'un gaz homogène sont mises sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c^2 - u^2}{c} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{u}{c} \frac{\partial v}{\partial x}$$

où  $u$ =vitesse,  $\varrho$ =densité  $> 0$  sont des fonctions de  $(t, x)$  admettant des dérivées partielles du premier ordre continues,  $p = p(\varrho)$  est la pression,  $c^2 = \frac{dp}{d\varrho}$ , avec  $c$  = vitesse du son  $> 0$  et  $v = \int_0^x c d \log \varrho$ . Elles sont interprétées comme les équations différentielles de Cauchy-Riemann relatives à l'élément linéaire riemannien indéfini

$ds^2 = (c^2 - u^2) dt^2 + 2u dt dx - dx^2$ . Les lignes de longueur nulle  $ds^2 = 0$  sont les lignes de discontinuité pour les premières dérivées de  $u, v$ . L'aut. donne ensuite une analyse du problème aux limites consistant à se donner  $v > 0$  et  $u$  pour  $t = 0$  en adoptant pour coordonnées  $\alpha, \beta$  les deux familles de caractéristiques. La fonction  $t(\alpha, \beta)$  vérifie, dans l'hypothèse d'une transformation adiabatique, une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre du type hyperbolique sous certaines conditions aux limites. Elle s'exprime à l'aide de la fonction de Riemann  $G(\alpha, \beta; \alpha^1, \beta^1)$  sous la forme

$$t(\alpha^1, \beta^1) = \frac{1}{2} \int_{\alpha^1}^{\beta^1} G(\alpha, \alpha; \alpha^1, \beta^1) \frac{d\alpha}{c(\alpha)}. \text{ On a ensuite } x(\alpha^1, \beta^1), \text{ mais il reste à trouver}$$

le moyen de passer de  $x(\alpha, \beta)$ ,  $t(\alpha, \beta)$  aux fonctions  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  afin d'avoir les intégrales des équations hydrodynamiques proposées. N. Théodoresco (Bucarest).

**Théodoresco, N.: La géométrie de l'équation des ondes. 1.** Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, H. 2, 101—109 (1939).

Wenn die partielle Differentialgleichung  $a^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu = 0$  gegeben ist und man den Raum der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit dem Riemannschen Zusammenhang des Tensors  $a_{ik}$  versieht, so entsprechen sich die charakteristischen Kegel zweier unendlich benachbarter Punkte in der Levi-Civitaschen Parallelverschiebung. Wird umgekehrt der  $x$ -Raum mit einer Riemannschen Metrik  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  versehen, für die genannte Eigenschaft besteht, so ist i. a.  $g_{ik} = \lambda a_{ik}$ , wo  $\lambda$  ein skalarer Faktor ist. Es gibt Fälle, in denen andere Lösungen möglich sind. G. Lampariello (Messina).

**Théodoresco, N.: Géodésiques de longueur nulle et propagation des ondes.** Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 23, 132—137 (1940).

Die Note enthält eine geometrische Deutung der Integralmannigfaltigkeiten einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die von der Idee ausgeht, dem Raume der Variablen eine durch diese Gleichung bedingte Riemannsche Metrik  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) zu erteilen. Da die geodätischen Linien der Länge Null wie die gewöhnlichen geodätischen Linien autoparallel im Sinne von Levi-Civita sind, und da die Integralmannigfaltigkeiten aus geodätischen Linien der Länge Null bestehen (Hadamard), so ist die durch die Gleichung bestimmte Wellenausbreitung eine Parallelausbreitung von Vektoren, die zu Anfang von Punkten einer  $n - 2$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit ausgehen.

G. Lampariello (Messina).

**Kienast, Alfred:** Über einige Fälle der Greenschen Funktion der Wärmeleitung. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, 29—34 (1940).

Unter Heranziehung von Summationsverfahren für Reihen untersucht Verf. die Eigenschaften der zu der Wärmeleitungsgleichung  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0$  bei verschiedenen Randbedingungen gehörigen Greenschen Funktion. *Luigi Amerio (Roma).*

**Grünberg, G., und M. Sontz:** A method for the calculation of the heating produced in an oilfilled high voltage cable by a short circuit. J. techn. Physics, Leningrad 11, 113—137 (1941) [Russisch].

**Grünberg, G.:** The heating of high-voltage oilfilled cables by a short circuit. J. techn. Physics, Leningrad 11, 138—148 (1941) [Russisch].

**Hornich, Hans:** Zwei vermischte Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mh. Math. Phys. 50, 40—47 (1941).

Durch Bildung der entsprechenden Greenschen Funktionen gibt Verf. explizite Darstellungen für die Lösungen der beiden folgenden Randwertaufgaben der Potentialtheorie: Gegeben ist eine Zerteilung der reellen Achse der komplexen  $z$ -Ebene in  $2n$  Intervalle (deren eines den unendlichfernen Punkt enthält), welche abwechselnd mit  $a_k$  und  $b_k$  bezeichnet werden ( $k = 1, 2, \dots, n$ ); man sucht nach denjenigen harmonischen Funktionen  $u(x, y)$  in der Halbebene  $y > 0$ , welche an den  $a_k$ -Intervallen gegebene Werte annehmen und an den  $b_k$ -Intervallen Bedingungen (Aufgabe A) des Typus  $\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} = g(x)$ , oder (Aufgabe B) des Typus  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda u) = h(x)$  befriedigen. *G. Cimmino (Bologna).*

**Vecoua, Elias:** Über harmonische und metaharmonische Funktionen im Raum. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR 2, 29—32 (1941).

Sei  $T$  ein Sterngebiet im dreidimensionalen Raum,  $\omega(r, \varphi, \theta)$  eine harmonische Funktion in  $T$  außer höchstens in dem Anfangspunkt 0 des Koordinatensystems, der ein Mittelpunkt von  $T$  sein soll; ist  $r\omega$  in 0 stetig, so kann man schließen, daß die

Funktion  $u(r, \varphi, \theta) = \omega(r, \varphi, \theta) - \frac{\lambda}{2} \int_0^r \sqrt{\frac{\varrho}{r-\varrho}} J_1(\lambda \sqrt{r(r-\varrho)}) \omega(\varrho, \varphi, \theta) d\varrho$  eine in  $T$  bis auf eine Singularität vom Typus  $\frac{1}{r}$  in 0 reguläre Lösung der Gleichung  $(1) \Delta u + \lambda^2 u = 0$  ist. Daraus ergibt sich leicht die Möglichkeit einer Reihenentwicklung nach den Funktionen  $J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_m(\varphi, \theta)$  für jede reguläre Lösung von (1) innerhalb einer Kugel  $0 \leq r \leq R$ . *G. Cimmino (Bologna).*

**Brodsky, G. A.:** Über eine Grenzwertaufgabe der Theorie der biharmonischen Funktionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 208—209 (1941).

Die Funktion  $F(r, \varphi) = (1 - r^2) \sum_{i=1}^{\infty} 2^i r^{2i} \cos 2^i \varphi$  liefert ein Beispiel einer Lösung der Gleichung  $\Delta \Delta F = 0$ , die im Kreise  $r < 1$  beschränkt ist und für welche der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow 1} F(r, \varphi)$  auf einer Menge positiven Maßes in  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  nicht existiert. *G. Cimmino (Bologna).*

**Nicolesco, Miron:** Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques. 3. Les fonctions polyharmoniques non décomposables (A). Disquisit. math. et phys., Bucarest 1, 173—187 (1940).

Auf der Grundlage einiger vorbereitender Formeln und Sätze, die Verf. im ersten Teil der Arbeit (dies. Zbl. 23, 322) aufgestellt hatte, gibt nun Verf. einige Typen von Summenzerlegungen einer polyharmonischen (d. h. in der Piconeschen Bezeichnung: hyperharmonischen) Funktion in der Umgebung einer isolierten Singularität an. Weiter formuliert er einige Kriterien, die zu entscheiden gestatten, wann eine solche Summenzerlegung mit der bekannten Entwicklung von Almansi zusammenfällt. Schließlich beschäftigt sich Verf. mit dem schon von Picone (vgl. dies. Zbl. 14, 261) untersuchten



Verhalten einer polyharmonischen Funktion in der Umgebung einer isolierten Singularität und im Unendlichen.

G. Fichera (Roma).

Nicolesco, Miron: *Remarques sur mon mémoire: Recherches sur les fonctions polyharmoniques*. Disquisit. math. et phys., Bucarest 1, 189—190 (1940).

Die Note geht auf eine Bemerkung zurück, die Picone zu einem vom Verf. in einer früheren Abhandlung (vgl. dies. Zbl. 23, 322) ausgesprochenen Satz gemacht hat.

G. Fichera (Roma).

### Variationsrechnung:

Douglas, Jesse: *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*. Trans. Amer. Math. Soc. 50, 71—128 (1941).

Das inverse Problem der Variationsrechnung lautet: Gegeben ist ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $y_i'' = F_i(x, y, y')$  ( $i = 1, \dots, n$ ); es ist zu entscheiden, ob die Integralkurven die Extremalen eines Variationsproblems  $\int \Phi(x, y, y') dx = \min$  darstellen, und im bejahenden Falle sind alle entsprechenden Funktionen  $\Phi$  zu bestimmen. Dieses für  $n > 1$  zugleich interessante und schwierige Problem wird hier für  $n = 2$  vollständig gelöst mittels einer Methode, die auch für allgemeine  $n$  verwendbar ist. Im Falle  $n = 2$  handelt es sich um das System (S) von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $y'' = F(x, y, z, y'), z'' = G(x, y, z, y')$ . Die Methode des Verf. beruht auf der Erkenntnis, daß das Problem mit der Integration des folgenden Systems (S) äquivalent ist:

$$dL/dx + F_y' L + G_y' M = 0, \quad dM/dx + \frac{1}{2} F_{z'} L + \frac{1}{2} (F_{y'} + G_{z'}) M + \frac{1}{2} G_{y'} N = 0, \\ dN/dx + F_{z'} M + G_{z'} N = 0, \quad AL + BM + CN = 0, \quad L_{z'} = M_{y'}, \quad N_{y'} = M_{z'}, \quad LN - M^2 \neq 0,$$

wobei  $L, M, N$  unbekannte Funktionen,  $A, B, C$  gewisse mittels partieller Ableitungen von  $F, G$  gebildete Ausdrücke und  $d/dx$  den Operator  $\partial/\partial x + y'\partial/\partial y + z'\partial/\partial z + F\partial/\partial y' + G\partial/\partial z'$  bedeuten. Das System S führt auf zwei weitere homogene Relationen zwischen  $L, M, N$ :  $A_1 L + B_1 M + C_1 N = 0$ ,  $A_2 L + B_2 M + C_2 N = 0$ , wobei die  $A_1, \dots, C_2$  mittels partieller Ableitungen von  $F, G$  gebildet sind. Zur Feststellung der Existenz von Lösungen von S und ihrer Allgemeinheit wird im wesentlichen die Riquiersche Theorie partieller Differentialgleichungen angewendet, wobei vier Fälle (und eine weitere Unterteilung) je nach dem Range der aus den drei Zeilen  $A, B, C$ ;  $A_1, B_1, C_1$ ;  $A_2, B_2, C_2$  gebildeten Matrix  $\Delta$  betrachtet werden. Ist z. B. der Rang von  $\Delta$  gleich 0, so sind die Integralkurven von S Extremalen, und die Allgemeinheit von  $\Phi$  beträgt zwei Funktionen von drei Veränderlichen und zwei Funktionen von zwei Veränderlichen. Ist dagegen der Rang von  $\Delta$  gleich 3, so entsprechen die Integralkurven von (S) keinem Variationsproblem, und dies tritt z. B. ein für  $y'' = y^2 + z^2$ ,  $z'' = y$ .

O. Borůvka (Brünn).

Hestenes, Magnus R.: *An analogue of Green's theorem in the calculus of variations*. Duke math. J. 8, 300—311 (1941).

$A$  sei ein offenes Gebiet, dessen Rand  $C$  aus einer endlichen Anzahl stetiger Bögen ohne mehrfache Punkte zusammengesetzt ist, derart, daß längs jeden Bogens die Tangente sich stetig ändert und jedes Paar dieser Bögen höchstens einen Endpunkt gemein hat. Es werde die Klasse derjenigen Funktionen  $z(x, y)$  betrachtet, die in einer Umgebung von  $A + C$  stetig sind und stetige Ableitungen besitzen. Unter den Ergebnissen des Verf. sei das folgende hervorgehoben:  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  seien in  $A + C$  stetig,  $w(x, y)$  daselbst integrierbar; dann gilt die Formel

$$\int_A (uz_x + vz_y + wz) dx dy = \int_C z(udy - vdx)$$

für jede Funktion  $z(x, y)$  der betrachteten Klasse genau dann, wenn sie für jede in einer Umgebung des Randes  $C$  von  $A$  verschwindende Funktion  $z(x, y)$  der betrachteten Klasse gültig ist.

S. Cinqini (Pavia).

# Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Gross, B.: Über die Theorie der dielektrischen Nachwirkung. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 35—47 (1940) [Spanisch].

Zwischen Spannung  $U$ , Stromstärke  $J$ , Widerstand  $R$  und Kapazität  $C$  besteht beim Strom eines Kondensators unter Berücksichtigung der Nachwirkung die Beziehung

$$(1) \quad J = \frac{U}{R} + C \frac{dU}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \varphi(t - \tau) d\tau,$$

worin  $\varphi$  eine monoton abnehmende Funktion des Argumentes mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$  ist, für die man oft (2)  $\varphi(t) = \beta t^{-n}$ ,  $n > 0$ , setzt. Bei Beschränkung auf  $J = 0$ , d. h. innere Entladung und Regeneration der Spannung, kann man (1) in die Form

$$(3) \quad \mathfrak{F}[U(t)] \equiv \frac{U}{R} + C \frac{dU}{dt} + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \varphi(t - \tau) d\tau = -i_0(t)$$

setzen. Kann man diese Gleichung für den Fall der vollständigen Aufladung lösen, d. h.  $U_a(t)$  so bestimmen, daß

$$(4) \quad \mathfrak{F}[U_a(t)] = 0; \quad U_a(0) = U_0$$

ist, so ist die allgemeine Gleichung (3) durch

$$U(t) = U_a(t) + \frac{R}{U_0} \int_0^t \frac{dU_a(\tau)}{d\tau} i_0(t - \tau) d\tau$$

gelöst. Um (4) zu erledigen, wendet Verf. eine schrittweise Annäherung an; im Sonderfall der Funktion (2) führt sie zur expliziten Auflösung

$$U_a(t) = U_0 \left\{ 1 - \frac{1}{RC} \int_0^t \mathcal{E}_p \left( -\frac{\beta}{C} \Gamma(p) s^p \right) ds \right\},$$

wo

$$\mathcal{E}_p(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu p + 1)}$$

die Mittag-Lefflersche Transzendente bezeichnet.

Harald Geppert (Berlin).

Collatz, L.: Einschließungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen. Math. Z. 47, 395—398 (1941).

Behandelt wird die Integralgleichung (1)  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$  mit symmetrischem, quadratisch integrierbarem Kern von mittlerer Stetigkeit.  $F_0(x)$  sei eine beliebige, in  $(a, b)$  stetige Funktion,  $F_1(x) = \int_a^b K(x, \xi) F_0(\xi) d\xi$ . Hat dann die Funktion  $G(x) = F_0(x)/F_1(x)$  im Grundgebiet  $(a, b)$  festes Vorzeichen und liegt sie daselbst zwischen den endlichen Grenzen  $G_{\min}$  und  $G_{\max}$ , so gibt es mindestens einen Eigenwert  $\lambda$  von (1), für den  $G_{\min} \leq \lambda \leq G_{\max}$  gilt. Beweis nach dem Maximum-Minimumprinzip. Ein Beispiel zeigt, daß bei geschickter (parameterabhängiger) Wahl von  $F_0(x)$  aus diesem Satz mit einem Schlage Einschließungsintervalle für unendlichviele Eigenwerte erhalten werden können. Der Satz reicht weiter als der in einer vorangehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. 23, 235) bewiesene.

Harald Geppert (Berlin).

Lodi, Maria: Risoluzione di una particolare equazione di Volterra in due variabili. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 391—393 (1941).

Mittels direkter Bildung des lösenden Kerns durch das Iterationsverfahren beweist Verf., daß die Volterrasche Integralgleichung

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \int_0^x \int_0^y \varphi(\xi, \eta) \exp\{\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta)\} d\eta d\xi$$



durch

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) \exp\{\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta)\} \cdot J_0\{\sqrt{-2(x - \xi)(y - \eta)}\} d\eta d\xi$$

gelöst wird.  $J_0$  bedeutet die Besselfunktion 0-ter Ordnung; beim entsprechenden

Problem in  $n$  Veränderlichen ist sie durch  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{I_i^n(x_v - \xi_v)^i}{(i!)^n}$  zu ersetzen. Harald Geppert.

**Féraud, L.:** Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. **41**, 81—93 (1941).

Übliche Anwendung der Laplace-Transformation zur Auflösung der linearen Volterra'schen Integralgleichungen erster und zweiter Art vom Faltungstyp nach dem von G. Doetsch in seinem Buche „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation“ (dies. Zbl. **18**, 129), bes. auf S. 279—289 gegebenen Vorbilde. Die Gleichungen werden im Rahmen spezieller Problemstellungen entwickelt (Erneuerungsgleichung, Gleichung der math. Bevölkerungstheorie u. a.), und durch die zusammenfassende Darstellung werden verschiedenartige in der Fachliteratur zerstreut liegende Ansätze einer einheitlichen Entwicklung eingeordnet. Verf. beschränkt sich auf die allgemein gültigen Auflösungsprozesse, ohne die durch die den Gleichungen zugrunde gelegten Interpretationen nahegelegten Beschränkungen betreffend den Kern irgendwie auszunutzen.

H. Hadwiger (Bern).

**Aprile, Giuseppe:** L'evoluzione del calcolo operatorio funzionale. Scientia **70**, Nr 7/8, 1—8 (1941).

Über Ziel und Wesen des Heavisidekalküls, seine strenge Begründung durch Giorgi und den Zusammenhang mit der Laplace-Abbildung. Bemerkungen über zweckmäßige Bezeichnungswahl.

Harald Geppert (Berlin).

● **McLachlan, N. W., et Pierre Humbert:** Formulaire pour le calcul symbolique. Mém. Sci. math. Fasc. **100**, 67 pag. Paris (1941).

Eine fast 700 Funktionen  $f(x)$  bzw.  $f(x, y)$  und ihre ein- bzw. zweidimensionalen Heaviside-Transformierten

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \varphi(p, q) = pq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px - qy} f(x, y) dx dy,$$

d. h. ihre mit der entsprechenden Anzahl der Transformationsvariablen multiplizierten ein- bzw. zweidimensionalen Laplace-Transformierten, enthaltende Formelsammlung. Sie ist vom erstgenannten Verf. begonnen, vom zweitgenannten bereichert und von W. T. Howell überprüft worden. Da in McLachlans Buch über Heavisidesche Operatorenrechnung (dies. Zbl. **21**, 229) nur 37, im Standardwerk von G. Doetsch über Laplace-Transformation (dies. Zbl. **18**, 129) nur 45 Funktionenpaare angeführt sind, aber die einseitige Laplace-Transformierte von  $f(x)$  mit der Fourier-Transformierten von  $e^{-\Re(p)x} F(x)$  mit  $F(x) = f(x)$  für  $x \geq 0$ , sonst Null, übereinstimmt, war man bisher gezwungen, Campbell-Fosters zwar vorzügliches, aber eigentlich einen Umweg bildendes Tafelwerk der Fourier-Integrale [Bell Telephon System, Mon. **584** (1931)] zu benutzen. Die vorliegende Zusammenstellung wird hoffentlich wesentlich dazu beitragen, daß die heuristische Operatorenrechnung von Heaviside in die straffe und vielversprechende Bahn der Laplaceschen Transformationstheorie gelenkt wird, eine Notwendigkeit, die zuerst vom Ref. [Acta Litt. Sci. Szeged **3**, 107—120 (1927)] nachdrücklich betont wurde.

v. Stachó (Budapest).

**San Juan, Ricardo:** Caractérisation de la transformation de Laplace par la loi du produit ou règle de la „Faltung“. Portugaliae Math. **2**, 91—92 (1941).

Bemerkung betreffend die Kennzeichnung der Laplace-Transformation auf Grund der im Titel angedeuteten Abbildungseigenschaft. Die Wiedergabe eines Resultates von E. Levi (dies. Zbl. **16**, 116), auf das sich Verf. stützt, ist erstellt, und die kurze formale Rechnung völlig unklar.

H. Hadwiger (Bern).

**Amerio, Luigi: Alcuni teoremi tauberiani per la trasformazione di Laplace.** Ann. Mat. pura appl., IV. s. 20, 159—193 (1941).

$F(t)$  sei eine Funktion, die die Laplacetransformierte  $f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$  für  $\Re(p) > \alpha$  besitzt; Verf. stellt zahlreiche Taubersche Sätze über das Verhalten von  $F(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  auf unter alleinigen Voraussetzungen über  $f(p)$ . — In einer ersten Gruppe von Sätzen wird  $f(p)$  in der Halbebene  $\Re(p) > 0$  als analytisch vorausgesetzt und einigen weiteren Bedingungen unterworfen, unter denen sich die Existenz von  $f(iv) = \lim_{u \downarrow 0} f(u + iv)$  und ihre Integrierbarkeit in jedem endlichen Intervall befindet.

Macht man dann eine Reihe weiterer Annahmen über das Verhalten von  $f(iv)$  im Unendlichen (von der Art, wie sie für die Gültigkeit des Fourierschen Integralsatzes vorausgesetzt werden), so erhält man Sätze, die hinreichende Bedingungen dafür liefern, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$  oder allgemeiner  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = A$  ist, wobei in einigen Fällen  $t$  der Einschränkung unterworfen wird, daß es eine Folge von Intervallen gleicher, aber beliebig kleiner Länge vermeiden muß. Zum Beweise dieser Sätze zieht Verf. eine von ihm früher [Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10 (1940)] gegebene Inversionsformel der Laplacetransformation heran. — In der zweiten Gruppe von Sätzen wird  $f(p)$  als meromorph mit lauter Polen erster Ordnung auf der Geraden  $\Re(p) = 0$  angenommen,

nämlich  $f(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p - i\lambda_n}$ . Mittels der Bohrschen Theorie der fastperiodischen Funktionen erhält Verf. unter passenden Voraussetzungen über die beiden Folgen  $\{a_n\}$  und  $\{\lambda_n\}$  zwei Taubersche Stabilitätssätze, die Bedingungen dafür enthalten, daß  $|F(t)| \leq M$  für  $0 \leq t < \infty$  ist. — Weiter geht Verf. zu dem Fall über, daß  $f(p)$  Pole der Ordnung  $\leq N$  in der Halbebene  $\Re(p) \leq 0$  besitzt, und schließlich wird ein Satz bewiesen, der eine hinreichende Bedingung für die Transformierbarkeit von  $F(t)$  in der Halbebene  $\Re(p) > 0$

und für die Gültigkeit der Formel  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iv_0 t} F(t) dt = 0$ , in der  $p = iv_0$  ein Regularitätspunkt von  $F(p)$  ist, sicherstellt.

Aldo Ghizzetti (Roma).

**Meijer, C. S.: Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation. 1. Mitt.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 727—737 (1941).

Verf. hat kürzlich eine Erweiterung der Umkehrformel der Laplace-Transformation auf Grund der Besselschen Funktionen  $I_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  gegeben (dies. Zbl. 23, 325). Inhaltlich und methodisch eng angeschlossen erfolgt nun eine solche Erweiterung mit den beiden Whittakerschen Funktionen  $M_{k,m}(z)$  und  $W_{k,m}(z)$ . — Unter gewissen, weiter unten näher präzisierten Voraussetzungen, gelten die Formeln:

$$(A) \quad \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} e^{ixs} M_{k-\frac{1}{2},m}(xs) (xs)^{k-\frac{1}{2}} ds$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt.$$

$$(B) \quad f(s) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} dt$$

$$\times \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\frac{1}{2}tz} M_{k-\frac{1}{2},m}(tz) (tz)^{k-\frac{1}{2}} f(z) dz.$$

Es sei 1.  $F(t)$  für  $t > 0$  definiert und in jedem endlichen Intervall  $0 < T_1 \leq t \leq T_2$  im Riemannschen Sinn eigentlich integrierbar; 2.  $\int_0^\infty e^{-\beta t} |F(t)| dt$  für  $\beta > a \geq 0$  konvergent; 3.  $F(t)$  in der Umgebung von  $t = x > 0$  von beschränkter Variation;



4.  $k \leq m \leq -k$ ,  $\beta > a$ ; dann gilt die Formel (A). Im Hinblick auf

$$M_{-m-\frac{1}{2}, m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{\frac{1}{2}z} \quad \text{und} \quad W_{-m+\frac{1}{2}, m}(z) = z^{\frac{1}{2}-m} e^{-\frac{1}{2}z}$$

ergibt sich aus (A) die „komplexe Umkehrformel“ der Laplacetransformation (vgl. das Buch von G. Doetsch [dies. Zbl. 18, 129] S. 105, Satz 2). Wenn 1.  $f(s)$  ana-

lytisch in  $R(s) > a \geq 0$  ist; 2. das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta + iy)| dy$  für  $\beta > a$  konvergiert;

3. für  $R(s) \geq \beta$   $|f(s)| < A$  ist; 4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = 0$  gleichmäßig für alle reellen  $y$  gilt; 5.  $R(k) \leq -R(m) < \frac{1}{2}$ ,  $R(s) > \beta$ , oder wenn 1.  $f(s)$  in  $R(s) > a \geq 0$  analytisch ist; 2.  $\mu > 1$  und  $|s^\mu f(s)| < B$  bleibt für  $R(s) > a$ ; 3.  $R(k) \leq -R(m) < \frac{1}{2}$ ,  $R(s) > \beta > a$  ist, gilt die Formel (B).  
H. Hadwiger (Bern).

**Smith, C. V. L.:** The fractional derivative of a Laplace integral. Duke math. J. 8, 47—77 (1941).

Untersuchungen über Funktionen, die sich als Stieltjessche Laplace-Integrale

$$(1) \quad g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t) \quad \text{und} \quad (2) \quad f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^\varrho d\alpha(t), \quad \varrho \geq 0$$

darstellen lassen;  $\alpha(t)$  ist in jedem Intervall  $(0, R)$  von beschränkter Variation und so normiert, daß  $\alpha(0) = 0$  und  $\alpha(t) = \frac{\alpha(t+0) + \alpha(t-0)}{2}$  gilt. Für nichtnegatives ganzzahliges  $\varrho$  ist

$$(3) \quad f(x) = (-1)^\varrho \frac{d^\varrho}{dx^\varrho} g(x).$$

Im ersten Teil untersucht Verf., inwieweit sich die durch (3) nahegelegte Erweiterung der Ableitung auf beliebigen Index  $\varrho$  durch das Integral (2) in die Reihe der bekannten Derivationen einordnen läßt. Der durch Auszeichnung des Punktes  $x = \infty$  aus dem allgemeinen Riemannschen Operator ausgesonderte (Liouvillesche) Operator

$${}_x I_x^\varrho [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_x^\infty (u-x)^{\varrho-1} f(u) du;$$

$${}_x D_x^\varrho [f(x)] = -\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_x^\infty (u-x)^{-\varrho} f^{(m+1)}(u) du; \quad \varrho = \varrho - m, \quad m = [\varrho]$$

entspricht dem oben genannten Derivator. Es gelten die Relationen

$$f(x) = (-1)^m {}_x D_x^\varrho [g(x)] \quad \text{und} \quad g(x) = {}_x I_x^\varrho [f(x)].$$

Der zweite Teil befaßt sich mit der Umkehrung des Integrals (2), die mit Hilfe des bekannten Inversionsoperators der Laplace-Transformation

$$L_{k,t}[f(x)] = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right), \quad 0 < t < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

[von D. V. Widder, Trans. Amer. Math. Soc. 36, 107—200 (1934); dies. Zbl. 8, 306, auf Stieltjessche Laplace-Integrale übertragen] dargestellt wird, und die Form

$$\alpha(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t u^{-\varrho} L_{k,u}[f(x)] du \quad \text{annimmt. Im letzten Teil werden notwendige und}$$

hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit von Funktionen durch Integrale (2) studiert.  
H. Hadwiger (Bern).

**Kober, H.:** On fractional integrals and derivatives. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 193—211 (1940).

Die Arbeit bringt — hier nicht näher angebbare — Erweiterungen mannigfacher Sätze von Hardy und Littlewood [Math. Z. 27, 565—606 (1928)], Love und L. C. Young (dies. Zbl. 19, 10 u. 250), Weyl [Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 62, 296 bis 302 (1917)] über Integralungleichungen, partielle Integration und Existenz von Ableitungen nicht ganzer Ordnung auf wesentlich allgemeinere Funktionenklassen bzw.

auf das nach rechts unendliche Intervall. Auf Anregung von A. Erdélyi werden einerseits bei den Integralen  $\alpha$ -ter Ordnung einer Funktion  $f(t)$  jene, durch Einführung eines komplexen Parameters  $\eta$  verallgemeinerten Integraltransformierten  $x^{\eta+\alpha} I_{\eta,\alpha}^{\pm}(x)$  bzw.  $x^{-\eta} K_{\eta,\alpha}^{\pm}(x)$  herangezogen, die sich als (beim Zeichen  $+$  bis  $x$ , beim Zeichen  $-$  von  $x$  abgenommene) Teile von  $\{\Gamma(\alpha)\}^{-1} \int_0^{\infty} |x-t|^{\alpha-1} e^{it} f(t) dt$  mit  $\varrho = \eta$  bzw.  $-\eta - \alpha$  ergeben, andererseits bei den Ableitungen, d. h. den Inversen voriger Transformierten, die Mellinschen Transformierten der letzteren benützt. Die Operatoren  $I_{\eta,\alpha}^{\pm}$  bzw.  $K_{\eta,\alpha}^{\pm}$  selbst werden zum Schluß mit Hilfe von Hankelschen Operatoren dargestellt.  
v. Stachó (Budapest).

**Erdélyi, A., and H. Kober:** Some remarks on Hankel transforms. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 212—221 (1940).

Es sei  $1 \leq p \leq 2$ ,  $p' = p/(p-1)$  und bei  $\frac{1}{2}\Re(\nu) > 1/p - 1$  die ganze Zahl  $m = 0$ , sonst der Bedingung  $1/p - 1 < \frac{1}{2}\Re(\nu) + m < 1/p$  genügend. Die vom zweitgenannten Verf. behandelten Integraltransformationen  $I_{\eta,\alpha}^{\pm}$ ,  $K_{\eta,\alpha}^{\pm}$  (siehe die vorangehende Besprechung) heranziehend, werden für die verallgemeinerten Hankelschen Transformierten

$$\mathfrak{S}_{\nu} f = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N J_{\nu,m} \{2(tx)^{\frac{1}{2}}\} f(t) dt$$

[wobei der Index  $p'$  die Mittelbildung mit dem Exponenten  $p'$  kennzeichnet, die für  $p' = \infty$  und  $\Re(\nu) \neq 0, -2, -4, \dots$  durch das gewöhnliche Integral über  $(0, \infty)$  zu ersetzen ist] der der Klasse  $L_p(0, \infty)$  angehörenden Funktionen  $f(t)$  folgende Sätze bewiesen:

$$1. \quad \left\{ \int_0^{\infty} |\mathfrak{S}_{\nu} f|^{p'} dx \right\}^{1/p'} = A \left\{ \int_0^{\infty} |f|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 2. \quad \int_0^{\infty} f_1 \mathfrak{S}_{\nu} f_2 dx = \int_0^{\infty} f_2 \mathfrak{S}_{\nu} f_1 dx,$$

3. für positive ganze  $l$  und  $\frac{1}{2}\Re(\nu) + 1/p \neq 0, -1, -2, \dots$ , sowie  $\frac{1}{2}\Re(\nu) + l < 1/p'$  ist  $I_{\frac{1}{2}\nu, l}^{\pm} \mathfrak{S}_{\nu} f = \mathfrak{S}_{\nu+2l} I_{\frac{1}{2}\nu, l}^{\pm} f$  bzw.  $K_{\frac{1}{2}\nu, l}^{\pm} \mathfrak{S}_{\nu+2l} f = \mathfrak{S}_{\nu} K_{\frac{1}{2}\nu, l}^{\pm} f$ , wobei die Darstellbarkeit nach der einen Seite jene nach der anderen zur Folge hat. — Der Schluß bringt für  $p = 2$  und  $\Re(\nu) > -1$  die zu 3. analogen Sätze über  $I_{\frac{1}{2}\nu, \alpha}^{\pm}$  bzw.  $K_{\frac{1}{2}\nu, \alpha}^{\pm}$  und die entsprechenden Relationen über die Inversen der  $I^{\pm}$ ,  $K^{\pm}$ .  
v. Stachó.

**Erdélyi, A.:** On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 293—303 (1940).

Die Ergebnisse der vorangehend besprochenen zwei Arbeiten werden durch konvergenzsichernde Modifikationen (Kernspaltungen) der früher benützten Integraloperatoren  $I_{\eta,\alpha}^{\pm}$ ,  $K_{\eta,\alpha}^{\pm}$  auf größere Bereiche des komplexen Parameters  $\eta$  erweitert.  
v. Stachó (Budapest).

**Lévy, Paul:** Sur quelques problèmes actuellement irrésolus et sans doute insolubles dans les théories des séries et des intégrales de Fourier. J. École polytechn., III. s. 145, 179—194 (1939).

Verf. glaubt, daß einige Probleme der Analysis beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft unlösbar seien. Z. B. fehlen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Funktion  $f(x)$  eine absolut konvergente Fourierentwicklung besitzt. Dasselbe gilt für Fourierintegrale. Es folgen einige Betrachtungen über den Faltungssatz von Doetsch.

Luigi Amerio (Roma).

**Haviland, E. K.:** On the distribution functions of the reciprocal of a function and of a function reduced mod. 1. Amer. J. Math. 63, 408—414 (1941).

Besitzt die für alle reellen  $t$  definierte meßbare Funktion  $x(t)$  eine — bis auf höchstens abzählbar viele singuläre Werte — durch  $\sigma(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} c(t) dt$ ,  $\sigma(-\infty) = 0$ ,



$\sigma(+\infty) = 1$  festgelegte asymptotische Verteilungsfunktion, kurz a. V. [wobei  $c(t)$  die charakteristische Funktion der  $t$ -Menge  $\{x(t) < \xi\}$  bezeichnet], so wird gezeigt, daß 1. die reziproke Funktion  $1/x(t)$  für  $x(t) \neq 0$ , sonst beliebig, dann und nur dann  $\tau(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} \xi) + \sigma(0) - \sigma(\xi^{-1})$ ,  $\tau(0) = \sigma(0)$  als a. V. besitzt, wenn  $\sigma(\xi)$  in  $\xi = 0$  stetig ist; 2. die auf den Modul 1 reduzierte Funktion  $x(t) - [x(t)]$  die a. V.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\sigma(n + \xi) - \sigma(n)]$  besitzt und in beiden Fällen die Art der Stetigkeit, Unstetigkeit bzw. Singularität von der einen a. V. auf die andere übertragen wird. *v. Stachó.*

### **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

**Erdős, Paul:** The dimension of the rational points in Hilbert space. *Ann. of Math.*, II. s. **41**, 734—736 (1940).

Let  $H$  denote the Hilbert space of all sequences of real numbers  $(x_1, x_2, \dots)$  such that  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ . Let  $R$  be the set of points of  $H$  having all coordinates rational. Let  $R_0$  be the set of points of  $H$  of the form  $(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots)$ , where the  $n_i$  are positive integers. Let  $R_1$  be the closure of  $R_0$ . — The author shows that  $R_0$ ,  $R_1$  and  $R$  have the dimension 1. — As the cartesian product  $R_1 \times R_1$  is homeomorphic to  $R_1$ , it follows that there exists a metric separable complete space  $X$  such that  $X$  and  $X \times X$  have dimension 1. *Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Julia, Gaston:** Sur une classe d'opérateurs bilinéaires bornés de l'espace hilbertien. *C. R. Acad. Sci., Paris* **112**, 1059—1062 (1941).

Soient  $\{e_n\}$  un système orthonormal complet dans l'espace  $H$  de Hilbert et  $\{A_n\}$  une suite de transformations linéaires de  $H$ . Supposons que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) A_n g$  converge fortement pour tout  $f$  et tout  $g$  de  $H$ . L'Auteur montre qu'il existe alors un nombre  $M$  tel que  $\|\sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) A_n g\| \leq M \|f\| \|g\|$ . Il base la démonstration sur un raisonnement bien connu, remontant à M. Osgood [Non-uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. J. Math.* **19**, 155—190 (1897)].

*Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Hedge, L. B.:** Moment problem for a bounded region. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**, 282—285 (1941).

Verf. gibt, anknüpfend an die „zweite“ und „dritte“ Lösung in Hausdorffs bekannter Arbeit zum Momentenproblem [*Math. Z.* **16**, 220—248 (1923)], eine sehr allgemeine Lösung des Momentenproblems im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum für sechs verschiedene Klassen von Belegungs- bzw. Dichtigkeitsfunktionen. Der Beweis wird bloß für die Klasse der Belegungsfunktionen von beschränkter Schwankung gegeben und im übrigen auf die Beweismethode bei Hausdorff verwiesen. Unter den für die Lösbarkeit des Momentenproblems erforderlichen Voraussetzungen befindet sich auch eine Annahme darüber, daß es reguläre Toeplitz-Transformationen gibt, hinsichtlich deren die Entwicklungen näher umgrenzter Funktionenklassen nach vorgegebenen biorthogonalen Polynomensystemen bestimmte Summierungseigenschaften haben; inwieweit solche Transformationen im allgemeinen existieren, bleibt offen. Die Erfüllbarkeit der Annahme zeigen jedoch Beispiele. Insbesondere sind die Hausdorffschen Ergebnisse sowie analoge Sätze aus der Theorie der Fourierschen und Fourier-Stieltjesschen Reihen Sonderfälle des Theorems der vorliegenden Arbeit. *Schoblik.*

**Ghermanescu, M.:** Sur une classe d'équations fonctionnelles. *C. R. Acad. Sci., Paris* **211**, 199—201 (1940).

Gegeben ist die Funktionalgleichung

$$(1) \quad E[\varphi] = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{i-1}) = 0,$$

in der die  $A_i$  Konstante sind. Dann gilt folgender Satz: Die Gleichung (1), in der wenigstens zwei der  $A_i$  nicht Null sind, läßt nicht identisch verschwindende Lösungen zu, wenn sich unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $E(x) = A_1 + A_2 x + \dots + A_n x^{n-1} = 0$  wenigstens eine Wurzel von  $1 - x^n = 0$  befindet. Setzt man  $1 - x^n = D(x)F(x)$ , wo  $D(x)$  der gr. g. T. der Polynome  $E(x)$  und  $1 - x^n$  ist, so wird die allgemeine Lösung der Gleichung (1) gegeben durch  $\varphi = F(u)$ , wo  $u$  eine willkürliche Funktion ist. — Es folgen besondere Fälle. *Luigi Amerio.*

### Praktische Analysis:

**Zinke, O.:** Beitrag zur geschlossenen Näherungsdarstellung elliptischer Integrale. *Z. angew. Math. Mech.* **21**, 114—118 (1941).

Bei vielen Anwendungen der elliptischen Integrale ist es erwünscht, eine Näherungsdarstellung zu kennen, die eine geschlossene Form besitzt und gleichzeitig eine möglichst einfache Funktion ist, so daß sich weitere Integrationen und Differentiationen nach dem Modul durchführen lassen. Verf. zeigt, wie man für vollständige und allgemeine elliptische Integrale erster und zweiter Gattung Näherungsfunktionen mit sehr kleinem Fehler gewinnen kann. Als einfache Anwendungsbeispiele werden Schwingungsdauer eines Pendels bei großen Ausschlägen sowie Umfang von Ellipsen beliebiger Exzentrizität in geschlossener Form berechnet. *Gran Olsson (Trondheim).*

**Veen, S. C. van:** Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrales erster Art in der Nähe von  $k = 1$ . **1. Mitt.** *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **44**, 606—613 (1941).

In der Halbebene  $0 < \Re(k)$ , die längs  $1 < k$  geschlitzt sei, besteht mit  $0 < |A_n| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  die Entwicklung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+k}}{\sqrt{1-k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-k)^{2n}}{(1+k)^n} \left[ \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right]^2 + \left( \frac{2}{1+k} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1-k}{1+k} \right)^n A_n.$$

*Maier (Greifswald).*

**Veen, S. C. van:** Annäherungsformeln für das vollständige elliptische Integral erster Art in der Nähe von  $k = 1$ . **2. Mitt.** *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **44**, 614—618 (1941).

$\frac{\pi}{2}$  Die Benutzung der Landenschen Transformation gibt für  $0 < k < 1$  und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K(k) \text{ scharfe Größenschätzungen, wie}$$

$$K(k) = \left( \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{1+k} \right) \ln \frac{1}{\sqrt{1-k}} + \left( \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{1+k} \right) \ln (\sqrt{1+k} + \sqrt{2}) + \frac{\ln k}{4\sqrt{k}} + O((1-k)^2).$$

*Maier (Greifswald).*

**Neder, Ludwig:** Über Schwerpunkts-Parallelweiser-Tafeln. *Z. angew. Math. Mech.* **21**, 126 (1941).

Auf  $m$  gegebenen Skalen werden  $m$  Punkte, auf  $n$  weiteren Skalen  $n$  Punkte, und auf  $r$  weiteren Skalen  $r$  Punkte gewählt. Die Schwerpunkte der 3 Punktgruppen seien  $P^I$ ,  $P^{II}$  und  $P^{III}$ . Durch  $P^I$  wird die Parallele zu  $P^{II}P^{III}$  gelegt und mit einer „Resultat-Skala“ geschnitten. „Spezialisierungen liegen nahe“ — so meint der Verf.! Beispiele und Hinweise auf Anwendungsmöglichkeiten fehlen. *Rehbock.*

**Knobloch, Hans:** Über eine Verzerrungsfunktion in der Nomographie. *Z. angew. Math. Mech.* **21**, 103—107 (1941).

Inhaltsangabe des Verf.: „Die Darstellungen der Nomographie enthalten zum Eingang und zur Ablesung Teilungen, denen jeweils bestimmte Abbildungsgesetze zugrunde liegen. Es wird gezeigt, wie die Abweichung einer solchen Teilung von einer Vergleichsteilung, beispielsweise einer linearen, zahlenmäßig angegeben werden kann. — Anwendung bei Doppelleitern.“ *Rehbock (Braunschweig).*



## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

**Izumi, Shin-ichi:** Lattice theoretic foundation of circle geometry. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 515—517 (1940).

Einordnung der Kreisgeometrien beliebiger Dimension in die Verbandslehre. Das geschieht auf Grund von 6 Axiomen, von denen die ersten vier den Kreisraum als schwach modularen, dimensionsfähigen Halbverband definieren. Eine Verschärfung des vierten Axioms ergibt die Trennung der Veblenschen Geometrien von den Kreisgeometrien. Axiom 5 beschreibt die eigentümlichen Inzidenzverhältnisse der zirkulären Gebilde, während Axiom 6 den konformen Raum als einen Komplementärverband erklärt. — Auf Grund dieser Verhältnisse ist es möglich, im engen Zusammenhang mit der affinen Geometrie eine Theorie der „Kongruenz“ und des „Parallelismus“ der Kreise zu entwickeln.

*D. Barbilian* (Bukarest).

**Haenzel, G.:** Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder. J. reine angew. Math. **183**, 232—242 (1941).

Die Achsen der 15 Umdrehungen, die ein Ikosaeder in sich überführen, liegen zu je 5 in 6 Ebenen  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_5$  und können daher mit  $E_{ik}$  bezeichnet werden, wobei  $E_{ik}$  in den Ebenen  $\pi_i$  und  $\pi_k$  liegt. Diese Achsen können zu 15 Operatoren oder vierreihigen Matrizen  $E_{ik}$  in Parallele gesetzt werden, die so definiert werden:

$$E_{0i}^2 = 1, \quad E_{0i}E_{0k} = -E_{0k}E_{0i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, 5; i \neq k) \\ iE_{0i}E_{0k} = E_{ik}.$$

Sie bilden 6 Pentaden  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_5$  mit denselben Eigenschaften wie die Ausgangspentade  $\pi_0(E_{01}, E_{02}, \dots, E_{05})$ . Auf Grund der (rein kombinatorischen) Zuordnung jener Achsen  $E_{ik}$  zu diesen Operatoren  $E_{ik}$  kann man nun zu allen physikalischen Größen wie Energie, Viererstrom usw. entsprechende geometrische Objekte am Ikosaeder aufweisen. Das Ikosaeder hängt nach Clebsch wieder aufs engste mit dem sechsfachen Brianchonschen Sechseit zusammen; so erhält man die früher vom Autor betrachtete geometrische Darstellung der Diracschen Operatoren (dies. Zbl. **22**, 388 u. **24**, 64). — Nun wird einerseits ein Ikosaederpaar betrachtet, das durch eine Drehung um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  vertauscht wird, andererseits ein Paar von vertauschbaren Elektronen. Werden die 15 Operatoren  $E_{ik}$  des einen Elektrons mit  $E_i$ , die des anderen mit  $F_m$  bezeichnet, so kann man 136 symmetrische Linearkombinationen  $\gamma_{im} = \frac{1}{2}(E_i F_m + F_m E_i)$  bilden; ihnen sind einerseits Lorentztransformationen, andererseits infinitesimale Drehungen des Ikosaederpaares zugeordnet.

*van der Waerden* (Leipzig).

**Riabouchinsky, Dimitri:** Quelques considérations sur les géométries non euclidiennes. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 141—144 (1941).

Verallgemeinerte Übertragung der auf Kreis und Kugel gestützten euklidischen Winkelmetrik auf den Fall einer Ellipse oder eines Paares konjugierter Hyperbeln bzw. einer beliebigen Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung als metrische Grundfigur. Aufstellung der zugrundeliegenden Identitäten. Bemerkungen über Anwendungen auf Differential- und nichteuclidische Geometrie.

*Strubecker* (Wien).

**Riabouchinsky, Dimitri:** Les trigonométries des espaces à  $n$  dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 208—212 (1941).

Nachdem in einer früheren Note (siehe vorsteh. Referat) die Beziehungen zwischen der Lobatschewskischen Planimetrie und der Trigonometrie auf dem Drehhyperboloid behandelt und die grundlegenden Identitäten aufgestellt wurden, gibt die vorliegende Note zunächst ein Beispiel und erläutert sodann den Fall beliebiger Dimension, wobei die betreffenden Identitäten für den Fall  $n = 4$  ausführlicher angeschrieben werden. Auf Anwendungen in anderen Zweigen der Mathematik wird nicht eingegangen, aber hingewiesen.

*Strubecker* (Wien).



## Elementargeometrie:

**Cavallaro, M. Vincenzo G.:** Sur les triangles ayant singulière la distance du centre de l'ellipse de Brocard au centre du cercle des neuf points. *An. Fac. Ci. Pôrto* 25, 129—140 (1940).

Verf. setzt die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt  $\omega$  der Brocardschen Ellipse und dem Mittelpunkt  $O_9$  des Feuerbachschen Kreises in bestimmte Größenbeziehungen zu verschiedenen anderen Strecken im Dreieck und untersucht für jede dieser Annahmen die Eigenschaften des Dreiecks, in dem sie erfüllt ist. So setzt er z. B.  $O_9\omega = \lambda \cdot \Omega\Omega'$  ( $\lambda$  eine reelle Konstante,  $\Omega, \Omega'$  die Brocardschen Punkte) und untersucht die Dreiecke, in denen  $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$  oder  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$  ist. Weiter setzt er in ähnlicher Weise  $O_9\omega$  in

Beziehung zu  $O\omega$  ( $O$  Umkreismittelpunkt),  $O\Omega, K\omega$  ( $K$  Lemoinescher Punkt),  $K\Omega$ , zu den Halbmessern des Brocardschen und der beiden Lemoineschen Kreise und zu den Achsen der Brocardschen Ellipse. Es würde zu weit führen, hier Einzelergebnisse dieser Untersuchungen mitzuteilen.

Max Zacharias (Berlin).

**Bouvaist, R., et V. Thébault:** Nouvelles sphères associées au tétraèdre. *C. R. Acad. Sci., Paris* 211, 377—378 (1940).

In der Note wird ein Analogon des Adamsschen Kreises eines Dreiecks angegeben. Sind in einem isodynamischen Tetraeder  $A_1A_2A_3A_4$  die Berührungspunkte der In-Kugel  $A'_1A'_2A'_3A'_4$ , so treffen sich die vier Transversalen in einem Punkte  $P$ .  $\Gamma_i$  sei der Inkegel der Tetraederecke  $A_i$ . Die durch  $P$  parallel zur Ebene  $A'_iA'_jA'_m$  gelegte Ebene schneidet den Kegel  $\Gamma_i$  in einem Kreise  $K_i$ , und die so erhaltenen Kreise  $K_1K_2K_3K_4$  liegen auf der „Adamsschen Kugel“ des Tetraeders.

E. Egerváry.

**Thébault, V.:** Sur une nouvelle sphère du tétraèdre. *C. R. Acad. Sci., Paris* 212, 327—328 (1941).

Aus den sechs Kanten eines Tetraeders  $T$  lassen sich bekanntlich drei windschiefe Vierseite  $Q_1, Q_2, Q_3$  bilden. Sei  $T_i$  dasjenige in  $T$  eingeschriebene Tetraeder, dessen Seitenflächen auf den Seiten von  $Q_i$  senkrecht stehen ( $i = 1, 2, 3$ ). Die zwölf Ecken der Tetraeder  $T_1, T_2, T_3$  liegen nach Verf. auf einer Kugel  $K$  (die „zweite Lemoinsche Kugel“ von  $T$ ). Die Quadratsumme der Entfernungen von den Seitenflächen von  $T$  nimmt im Mittelpunkt von  $K$  ihren Kleinstwert an.

E. Egerváry (Budapest).

**Maccaferri, Eugenio:** Ciclometria elementare. *Boll. Un. Mat. ital., II. s.* 3, 327—332 (1941).

In einer schulgeometrischen Behandlung der niederen Kreistheorie geht Verf. von der Kreisfläche aus und leitet aus dieser mittels des Stetigkeitsaxioms die Kreislänge ab.

U. Morin (Padova).

## Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Weiss, E. A.:** Metrik in Dreieckskoordinaten. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 51, Abt. 2, 9—19 (1941).

Didaktische Darlegung der Grundformeln und der Grundgebilde der sogenannten Dreiecksgeometrie unter ständiger Benutzung der absoluten Punkte und Bevorzugung des Poncelet-Laguerreschen Ideenkreises.

D. Barbilian (Bukarest).

**Fano, Gino:** Su alcune particolari reti di quadriche dello spazio ordinario. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat.* 1, 271—281 (1940).

In einer vorangehenden Arbeit (dies Zbl. 22, 387) hat Verf. die Systeme aus  $\infty^4$  ebenen Quartiken  $C^4$ , die eine allgemeine  $C^5$  in 10 Punkten berühren, untersucht und sie in zwei Klassen eingeteilt, je nachdem die Berührungspunkte der  $C^4$  mit der  $C^5$  einer  $C^3$  angehören oder nicht. Die Systeme der zweiten Klasse zerfallen wieder in zwei Unterklassen nach der Art des Verhaltens ihrer in zwei Kegelschnitte zerfallenden  $C^4$ . Solche  $C^4$  gibt es immer in endlicher Anzahl; sie können aus zwei Kegelschnitten bestehen, deren jeder die  $C^5$  in 5 Punkten berührt, oder aus zwei Kegelschnitten, die  $C^5$  je dreipunktig berühren und sich in vier auf der  $C^5$  liegenden Punkten treffen. Dieser letzte Fall kann nur für Systeme der zweiten Klasse auftreten, woher die be-



zeichnete Unterteilung dieser Klasse rührt. — Faßt man die Quadriken eines Netzes  $\Sigma$  des  $S_4$  als Punkte einer Ebene auf, so bilden die  $\infty^1$  Kegel aus  $\Sigma$  eine allgemeine  $C^5$ , und die Quadriken aus  $\Sigma$ , die einen  $S_3$  des  $S_4$  berühren (oder die Kegel des Netzes, das durch Schnitt von  $\Sigma$  mit  $S_3$  entsteht), bilden eine  $C^4$ , die die oben bezeichnete  $C^5$  in jedem Treffpunkt berührt. Läßt man dann  $S_3$  in  $S_4$  variieren, so erhält man ein System von  $C^4$ , die die  $C^5$  in 10 Punkten berühren, das zu der zweiten der oben bezeichneten Klasse gehört und innerhalb derselben ein allgemeines System darstellt. Verf. untersucht dieses System unter verschiedenen Bedingungen, die die eine oder andere der obengenannten Unterklassen nach sich ziehen, und in weiteren Spezialfällen unter Eingehen auf einige damit zusammenhängende Konfigurationen.

*L. Campedelli* (Firenze).

**Bogdan, C. P.:** Sulla superficie di Veronese. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 26, 335—389 (1940).

Es handelt sich um eine Untersuchung der Veroneseschen Fläche, d. h. der rationalen  $V_2^4$  des  $S_5$ , deren Hyperebenenschnitte auf die Ebene durch das System der Kegelschnitte abgebildet werden; sie bezieht sich vorwiegend auf diejenigen Eigenschaften, die mit ihrer Erzeugung durch drei passende  $S_3$ -Sterne oder drei Ebenen des  $S_5$ , die in einer passenden Homographie aufeinander bezogen sind, zusammenhängen. Insbesondere werden die verschiedenen Möglichkeiten der eindeutigen Festlegung einer  $V_2^4$  untersucht, wenn man als Bedingungen den Durchgang durch vorgegebene Punkte oder Kurven oder Berührungsvorschriften wählt. Die Ergebnisse wurden bereits in zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 20, 390; 21, 62) mitgeteilt. Nach einer Einleitung zerfällt die Arbeit in vier Teile. Das erste Kapitel behandelt einige mit der Veroneseschen Fläche zusammenhängende Gesamtheiten, nämlich die  $V_4^3$  ihrer Sehnen; die  $V_3^3$  eines  $S_4$ , die von den Berührungsebenen in den Punkten eines ihrer Kegelschnitte gebildet wird; die  $V_3^3$ , die von den Ebenen der durch einen gegebenen Punkt gehenden Kegelschnitte der Fläche gebildet wird (diese beiden  $V_3^3$  gehören der  $V_4^3$  an); die Gesamtheit aller ihrer Tangentialebenen; den Del Pezzo-Kegel in einem seiner Punkte  $P$ , d. h. den Ort der Schmiegungebenen in  $P$  an alle durch  $P$  gehenden Kurven der Fläche. Bezüglich des letzteren wird u. a. festgestellt, daß er die  $V_2^4$  selbst enthält und mit dem Kegel zusammenfällt, der sie aus der Tangentialebene von  $P$  projiziert. Im zweiten Kapitel werden die Projektionen der  $V_2^4$  aus einer Geraden untersucht, insbesondere die Projektionen von einer Sehne, von einer Tangente und von einer in einer Berührungsebene liegenden Geraden aus. Gegenstand des dritten Kapitels ist die Konstruktion der Veroneseschen Fläche mittels projektiv bezogener  $S_3$ -Sterne oder projektiv bezogener Ebenen und die Untersuchung der besonderen Bedingungen, denen diese Sterne oder Ebenen genügen müssen. Damit hat Verf. die notwendigen Hilfsmittel an der Hand, um das Hauptziel seiner Untersuchung, dem das vierte Kapitel gewidmet ist, anzugreifen. U. a. wird hier bewiesen, daß es eine einzige Veronesesche Fläche gibt, die drei vorgegebene Ebenen in vorgegebenen Punkten berührt und durch einen vierten gegebenen Punkt hindurchgeht (oder eine weitere Ebene berührt); es wird ferner bewiesen, daß durch eine  $C^4$  und einen Kegelschnitt, die beide dem  $S_5$  angehören und zwei Punkte gemein haben, genau zwei  $V_2^4$  hindurchgehen. Daraus werden verschiedene Folgerungen abgeleitet, die sich insbesondere auf die Spezialfälle beziehen, die aus den möglichen Zerfallsarten dieser Kurven entstehen. Mit dem gleichen Gegenstand haben sich, wie Verf. bemerkt, C. Segre und Rosati befaßt; dem Erstgenannten ist die Bemerkung zu verdanken, daß eine  $V_2^4$  durch zwei ihrer Hyperebenenschnitte bestimmt ist (1885), während Rosati die Eigenschaft bewies, daß durch eine elliptische  $C^6$  des  $S_5$  vier Veronesesche Flächen hindurchgehen (1902). Verf. findet auch diesen letztgenannten Satz wieder und gibt darüber hinaus eine tatsächliche Konstruktion jener vier  $V_2^4$  an. Bezüglich des Segreschen Satzes bemerkt Ref., daß man ihn nicht, wie Verf. (S. 364) tut, in dem Sinne deuten darf, daß „durch zwei  $C^4$  eine einzige Veronesesche Fläche hindurchgeht“, um dann daraus



zu schließen, daß „diese Bedingungen überzählig sind, weil im allgemeinen durch zwei  $C^4$  keine Veronesesche Fläche hindurchgeht“. Die Beweisführung benutzt synthetische Hilfsmittel, die gelegentlich durch Überlegungen analytischen Charakters ergänzt werden.

*L. Campedelli (Firenze).*

**Sz. Nagy, Gyula v.: Geometrie endlicher Ordnung.** Mat. fiz. Lap. 48, 207—242 u. dtsh. Zusammenfassung 242 (1941) [Ungarisch].

Verf. gibt einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse aus der im wesentlichen von C. Juel eingeschlagenen Untersuchungsrichtung. Es handelt sich um die gestaltliche Beschreibung der einfachsten projektiv geschlossenen krummen Gebilde endlicher Ordnung mit gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften. — Dieser Bericht gliedert sich in die folgenden 18 Paragraphen: 1. Einleitung. Definitionen. 2. Ebene Kurven zweiter und dritter Ordnung. 3. Ebene Kurven vierter Ordnung. 4. Das Korrespondenzprinzip von C. Juel. 5. Ebene Kurven vom Index Null ohne Tangentensingularitäten. 6. Ebene Kurven vom Maximalindex. Ebene Kurven vom Maximalklassenindex. 7. Übereinstimmung der Eigenschaften der ebenen Kurven vom Maximalindex mit denjenigen von den reellen ebenen algebraischen Kurven. 8. Raumkurven dritter und vierter Ordnung. 9. Raumkurven vom Maximalindex. 10. Kurven in mehrdimensionalen projektiven Räumen. 11. Ordnungsfeste Erweiterung eines Bogens zu einer geschlossenen Kurve. 12. Verallgemeinerung der Ordnung von Kurven. Die zyklische Ordnung. 13. Bewegungsordnung, Translationsordnung, Spiegelungsordnung. 14. Flächen zweiter Ordnung. 15. Flächen dritter Ordnung. 16. Flächen vierter Ordnung. 17. Flächen vom Maximalindex. 18. Polygon als Kurve. Polyeder als Fläche. — Der Bericht schließt mit einem Literaturverzeichnis. Dies macht aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es sei hier auf die Arbeiten von Montel, Linsman und insbesondere auf den Bericht von Haupt (im Literaturverzeichnis Abhandlung 16a, 12a bzw. 7a) verwiesen. Im Bericht von Haupt wurden auch solche Gesichtspunkte in Betracht gezogen, welche im gegenwärtigen Bericht außer acht gelassen wurden, wie z. B. die mengentheoretisch-topologische Verallgemeinerung der Ordnung und die Strukturfragen der allgemeinen krummen Gebilde. *Autoreferat.*

**Galafassi, Vittorio Emanuele: I tipi di superficie cubica generale reale dedotti per piccola variazione da superficie cubiche riducibili.** Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 17—29 (1941).

Vom topologischen Standpunkte aus gibt es fünf Arten von algebraisch allgemeinen Flächen 3. Ordnung: Die erste besteht aus zwei geschlossenen Flächen, die der projektiven Ebene und der Kugel bzw. homöomorph sind; die anderen vier sind alle einteilig und haben bzw. die Zusammenhangszahlen 1, 3, 5, 7. Verf. beweist hier, daß alle diese Flächen aus einer zerfallenden Fläche 3. Ordnung durch die Methode der „kleinen Umformung“ („piccola variazione“) konstruiert werden können. Diese Methode ist wohl bekannt: ist  $S = 0$  die gewählte zerfallende Fläche 3. Ordnung, ist  $R = 0$  eine andere Fläche 3. Ordnung, und bildet man das Büschel  $S + tR = 0$ , so sagt man, daß diejenigen Flächen des Büschels, die einem genügend kleinen (positiven oder negativen) Wert von  $t$  entsprechen, aus der Fläche  $S$  durch eine „kleine Umformung“ entstehen. Läßt man  $R = 0$  in eine Ebene  $\sigma$  und eine Quadrik  $\Gamma$  oder in drei Ebenen zerfallen, so kann man alle fünf allgemeinen  $F^3$  erhalten. Genauer: Ist  $\Gamma$  einteilig, so ist  $F^3$  der projektiven Ebene homöomorph; wenn  $\Gamma$  reelle elliptische Punkte hat und  $\sigma$ ,  $\Gamma$  keinen reellen Schnittpunkt haben, so ist  $F^3$  zweiteilig; hat  $\Gamma$  reelle elliptische Punkte und schneiden sich  $\sigma$ ,  $\Gamma$  in einem Kegelschnitt  $\gamma$ , so ist  $F^3$  entweder zweiteilig oder einteilig mit der Zusammenhangszahl 1, 3, 5, je nachdem  $\gamma$  keinen reellen Basispunkt, oder 2, oder 4, oder 6 reelle Basispunkte des Büschels  $S + tR = 0$  enthält; hat  $\Gamma$  reelle hyperbolische Punkte, so ist  $F^3$  einteilig mit der Zusammenhangszahl 1, 3, 5, 7, je nachdem  $\gamma$  keinen oder 2, 4, 6 reelle Basispunkte des Büschels  $S + tR = 0$  enthält; aus drei Ebenen erhält man schließlich alle vier einteiligen  $F^3$ .

*E. G. Togliatti (Genova).*